prima prova parziale Geometria 1 parte B - 21 aprile 2023

Il compito va svolto in due ore (40 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, possibilmente su una facciata A4, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta. Alla fine si consegna questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento del compito.

Riportare i seguenti dati sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: _______________ **Nome:** _______________ **Matricola:** ________

Testo del compito:

Esercizio 1. Siano r, s due rette sghembe in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ con distanza $d = 1$ e angolo $\theta \neq \pi/2$. Sia Γ il gruppo delle isometrie di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ che fissano puntualmente r (cioè le isometrie ϕ tali che $\phi(R) = R$ per ogni $R \in r$).

(1) Per ogni $\phi, \psi \in \Gamma$ determinare la relazione reciproca delle rette $\phi(s)$ e $\psi(s)$.
(2) Per ogni $\phi \in \Gamma$ determinare distanza ed angolo tra s e $\phi(s)$.
(3) Descrivere tramite una equazione cartesiana l'insieme formato dalla unione insiemistica delle rette $\phi(s)$ al variare di ϕ in Γ.

[*Suggerimento: usare un riferimento ortogonale in cui $r = O + \langle e_1 \rangle$, la retta di minima distanza di r ed s sia $h = O + \langle e_3 \rangle$, quindi s passa per un punto di h con direzione ortogonale ad h, ma diversa da e_2 ...*]

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ dotato del riferimento canonico, consideriamo i sottospazi

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(1) Determinare le posizioni reciproche di π ed r come sottospazi affini, determinare la distanza tra π ed r e i punti di minima distanza.
(2) Determinare la proiezione ortogonale r' della retta r sul piano π, e l'angolo θ tra r ed r'; giustificare perché possiamo dire che questo è l'angolo tra r e π.
(3) Dati una retta r e un piano π in $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$, è vero che la distanza e l'angolo tra r e π determinano la posizione reciproca di questi due sottospazi a meno di isometrie?

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$, sono dati due piani π, σ sghembi tra loro.

(1) Mostrare che esistono rette sghembe sia con π che con σ; per ogni tale retta r mostrare che esiste un unico spazio S_r di dimensione 3 contenente r e che sia "non generante" con entrambi i piani (cioè $S_r \vee \pi \neq \mathbb{A}^5(\mathbb{Q}) \neq S_r \vee \sigma$);
(2) Mostrare che $S_r \vee \pi = r \vee \pi$ e $S_r \vee \sigma = r \vee \sigma$; determinare le possibili posizioni reciproche di S_r con π e con σ.
(3) Determinare i casi possibili per le intersezioni $S_r \wedge \pi$ e $S_r \wedge \sigma$, e dire se queste determinano lo spazio S_r.

[*Suggerimento: eventualmente scegliere un riferimento affine in cui i due piani abbiano espressione semplice, ma si può anche risolvere l'esercizio in modo astratto (preferibile).*]

... versione facilitata *(e approfondimenti in italico)* **...**

Testo del compito:

Esercizio 1. In $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ dotato del riferimento ortogonale canonico, sono date le rette $r = O + \langle e_1 \rangle$ e $s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

(1) determinare posizioni reciproche, distanza e angolo tra r ed s;
(2) sia Γ l'insieme delle isometrie ϕ di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ che fissano puntualmente r; scrivere le matrici di tali isometrie;
(3) per ogni isometria $\phi \in \Gamma$, calcolare l'immagine $\phi(s)$ di s tramite ϕ;
(4) per ogni isometria $\phi \in \Gamma$, calcolare posizioni reciproche, distanza e angolo tra s e $\phi(s)$;
(5) descrivere con una equazione cartesiana l'insieme formato dalla unione insiemistica delle rette $\phi(s)$ al variare di $\phi \in \Gamma$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ dotato del riferimento canonico, consideriamo i sottospazi

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

(1) Determinare le posizioni reciproche di π ed r come sottospazi affini, determinare la distanza tra π ed r e i punti di minima distanza.
(2) Determinare la proiezione ortogonale r' della retta r sul piano π, e l'angolo θ tra r ed r';
(3) mostrare che l'angolo calcolato nel punto precedente dipende solo da retta e piano e non da altre scelte;
(4) dati una retta r e un piano π in $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$, mostrare che la distanza e l'angolo tra r e π determinano la loro posizione reciproca affine;
(5) dati una retta r e un piano π in $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$, mostrare che la distanza e l'angolo tra r e π determinano la loro posizione reciproca a meno di isometrie, cioè che esiste un isometria che manda r in r' e π in π' se e solo se $d(r, \pi) = d(r', \pi')$ e $\theta(r, \pi) = \theta(r', \pi')$.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$, sono dati due piani π, σ sghembi tra loro.

(1) scegliendo un punto non appartenente all'unione dei due piani e un vettore opportuno, mostrare che esistono rette sghembe sia con π che con σ; *delle rette per un fissato punto, quali sono sghembe con entrambi i piani, quali con uno, e quali con nessuno?*
(2) per ogni retta r sghemba sia con π che con σ, si calcoli la dimensione degli spazi $r \vee \pi$ e $r \vee \sigma$;
(3) si ponga $S_r = (r \vee \pi) \wedge (r \vee \sigma)$ e si calcoli la dimensione di S_r;
(4) si calcolino le dimensioni di $S_r \vee \pi$ e $S_r \vee \sigma$, e si dimostri che $S_r \vee \pi = r \vee \pi$ e $S_r \vee \sigma = r \vee \sigma$;
(5) si mostri che S_r contiene r ed è "non generante" sia con π che con σ, ed è l'unico spazio di dimensione 3 con queste proprietà;
(6) tenendo conto che S_r è iperpiano di $r \vee \pi$, mostrare che o π è parallelo a S_r oppure lo interseca in una retta; idem per σ, ma π e σ non possono essere entrambi paralleli a S_r;
(7) mostrare che conoscere le intersezioni di π e σ con S_r determina lo spazio S_r.
(8) *ci si poteva chiedere anche che relazioni reciproche vi sono tra gli spazi S_r per diverse rette (a seconda della posizione delle rette...), per esempio quali rette r hanno lo stesso spazio S_r?*