prima prova parziale Geometria 1 parte B - 24 aprile 2024

Il compito va svolto in 90 minuti (30 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, possibilmente su una facciata A4, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta. Alla fine si consegna questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento del compito.

Riportare i seguenti dati sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: _______________ **Nome:** _______________ **Matricola:** ________

Testo del compito:

Esercizio 1. In $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ consideriamo le due rette

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(1) Determianare posizione reciproca, distanza, angolo, punti di minima distanza per le due rette date;
(2) determinare il volume e le aree dei quattro triangoli laterali del tetraedro formato dai punti di appoggio dati e dai punti di minima distanza;
(3) determinare le possibili immagini $F(s)$ di s tramite rigidità F di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ che fissano puntualmente r. [*Nota: non viene chiesto di calcolare una matrice di F.*]

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $V_4(\mathbb{R})$ dotato del riferimento canonico, consideriamo i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

(1) Verificare che i generatori di W sono ortogonali tra loro; determinare le proiezioni ortogonali dei generatori di W su U e l'angolo tra loro; idem su $U^\perp$;
(2) Mostrare che esiste una base ortogonale di W tale che la sua proiezione ortogonale su U dà una base ortogonale di U e la sua proiezione ortogonale su $U^\perp$ dà una base ortogonale di $U^\perp$;
(3) In generale, siano dati due piani U, W in $V_4(\mathbb{R})$ tali che W è in somma diretta sia con U che con $U^\perp$; mostrare che la posizione reciproca euclidea dei due sottospazi è determinata da due parametri (suggerimento: cercare opportuni angoli);
in generale, mostrare che la posizione reciproca di due piani nello spazio euclideo $\mathbb{E}^5(\mathbb{R})$ è determinata da tre parametri.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$, sono date tre rette r, s, t il cui sup è tutto lo spazio (cioè $r \vee s \vee t = \mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$).
(1) Mostrare che le tre rette sono a due a due sghembe e determinare le intersezioni due a due degli spazi $r \vee s$, $r \vee t$, $s \vee t$ (per esempio, $(r \vee s) \wedge (r \vee t) = r$?).
(2) Sia ora un punto P non appartenente ai sottospazi $r \vee s$, $r \vee t$, $s \vee t$; determinare le dimensioni degli spazi $\alpha = P \vee r \vee s$, $\beta = P \vee r \vee t$, $\gamma = P \vee s \vee t$; e delle loro intersezioni due a due $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \wedge \gamma$, $\beta \wedge \gamma$ (per esempio: $\alpha \wedge \beta = P \vee r$? se no, perché?);
(3) Usando le notazioni precedenti, determinare la dimensione della intersezione tripla $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$, e la posizione reciproca di questa rispetto alla tre rette date.

[*Suggerimento: eventualmente scegliere un riferimento affine in cui le rette abbiano espressione semplice, ma si può anche risolvere l'esercizio in modo astratto (preferibile).*]