seconda prova parziale Geometria 1 parte A - 23 gennaio 2023

Il compito va svolto in due ore (40 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta. Alla fine si consegna questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento del compito.

Riportare i seguenti dati anche sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: _______________ **Nome:** _______________ **Matricola:** ________

Testo del compito:

Esercizio 1. Siano dati i seguenti sottospazi di $V_4(\mathbb{Q})$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(1) determinare le matrici nella base canonica della proiezione π di asse $U+V$ e direzione W, e della simmetria σ di asse U e direzione $V+W$;
(2) mostrare che $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$ e determinarne i polinomi caratteristico e minimo.
(3) dato un endomorfismo ϕ di $V_n(K)$ tale che $\phi^3 = \phi$, mostrare che ϕ è diagonalizzabile, e che è composizione di una simmetria e di una proiezione opportune. Tale fattorizzazione è unica?

Esercizio 2. Sia $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ la funzione lineare di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.
(1) determinare il polinomio caratteristico $p_A(X)$ e il polinomio minimo $m_A(X)$ di A;
(2) discutere la diagonalizzabilità di A su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile $H \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;
(3) discutere la diagonalizzabilità di A su $\mathbb{R}$ ed eventualmente trovare una matrice reale simile ad A a blocchi diagonali più semplici possibili;
(4) discutere la diagonalizzabilità di A su $\mathbb{Q}$ ed eventualmente trovare una matrice razionale simile ad A a blocchi diagonali più semplici possibili;

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in base canonica.
(1) Determinare la forma di Jordan di ϕ, delle sue potenze e delle potenze di $\phi - \mathrm{id}$.
(2) Trovare tutte le basi di K^5 jordanizzanti per ϕ.
(3) Determinare tutte le possibili matrici di Jordan (d'ordine qualsiasi) aventi stesso polinomio minimo e stesse dimensioni degli autospazi della matrice A.