seconda prova parziale Geometria 1 parte A - 22 gennaio 2024

Il compito va svolto in due ore (40 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta. Alla fine si consegna questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento del compito.

Riportare i seguenti dati anche sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: ______________ **Nome:** ______________ **Matricola:** ________

Testo del compito:

Esercizio 1. Siano dati i seguenti sottospazi di $V_4(\mathbb{Q})$:

$$U = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle \quad V = \langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle \quad W = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$$

(1) calcolare la matrice A nella base canonica della simmetria σ_U^W (asse U e direzione W);
(2) calcolare la matrice B nella base canonica della simmetria σ_V^W (asse V e direzione W);
(3) verificare che AB è diverso da BA, e mostrare che AB e BA sono matrici simili.

Esercizio 2. Sia $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ la funzione lineare di matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(1) determinare il polinomio caratteristico $p_A(X)$ e il polinomio minimo $m_A(X)$ di A;
(2) discutere la diagonalizzabilità di A su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile $H \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;
(3) discutere la diagonalizzabilità di A su $\mathbb{Q}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile $R \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ tale che $R^{-1}AR$ sia a blocchi diagonali più semplici possibili.

Esercizio 3. Si consideri la matrice nilpotente standard di ordine 4 nel campo K:

$$N = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} .$$

(1) Determinare le forme di Jordan e basi di $V_4(K)$ jordanizzanti per N^2 e N^3;
(2) Sia $\mathcal{C}(N)$ l'insieme della matrici che commutano con N; mostrare che è un sottospazio di $M_4(K)$, determinare dimensione e una base di tale sottospazio;
(3) Sia $\mathcal{C}(N^2)$ il sottospazio della matrici che commutano con N^2; determinare dimensione e una base di tale sottospazio;
(4) ricordiamo che $K[N]$ è il sottospazio delle matrici polinomiali in N (immagine del morfismo ev_N di valutazione in N); che relazioni vi sono tra i sottospazi $\mathcal{C}(N)$, $\mathcal{C}(N^2)$, $K[N]$, $K[N^2]$?