

seconda prova parziale Geometria 1 parte B - 16 giugno 2023

Il compito va svolto in due ore (40 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, possibilmente su una facciata A4, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta. Alla fine si consegna questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento del compito.

Riportare i seguenti dati sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____

Testo del compito:

Esercizio 1.

- (1) Sono dati tre punti A, B, C in posizione generale in un piano proiettivo, e sui tre lati a, b, c sono date delle coppie di punti rispettivamente $A', A'', B', B'', C', C''$ che siano separatori armonici dei vertici. Mostrare che A', B', C' sono allineati se e solo se le rette AA'', BB'', CC'' sono concorrenti in un punto. Dualizzare l'enunciato. Quali risultati di geometria affine e/o conforme si possono dedurre da questi enunciati?
- (2) Sono dati quattro punti A, B, C, D in posizione generale in uno spazio proiettivo di dimensione 3, e sui quattro lati AB, BC, CD, DA sono date delle coppie di punti rispettivamente A' e A'', B' e B'', C' e C'', D' e D'' che siano separatori armonici dei vertici. Mostrare che A', B', C', D' sono complanari se e solo se A'', B'', C'', D'' sono complanari se e solo se i piani $CDA'', ADB'', ABC'', BCD''$ sono concorrenti in un punto. Dualizzare l'enunciato. Quali risultati di geometria affine e/o conforme si possono dedurre da questi enunciati?

Esercizio 2. Sono dati due triangoli di vertici A, B, C e A', B', C' in un piano proiettivo, prospettivi dallo stesso punto O , senza vertici né lati comuni. Sia r la retta di omologia e siano $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ le intersezioni di r con i raggi OA, OB, OC rispettivamente. Su ogni raggio OA, OB, OC siano A_1, B_1, C_1 le intersezioni con i lati a, b, c rispettivamente, e siano A'_1, B'_1, C'_1 le intersezioni con i lati a', b', c' rispettivamente. Scelto un opportuno sistema di riferimento proiettivo:

- (1) Determinare i birapporti $(O X X' \tilde{X})$ per $X \in \{A, B, C\}$, e giustificare perché risultano uguali;
- (2) Determinare i birapporti $(O X X' X_1)$ e $(O X' X X'_1)$ per $X \in \{A, B, C\}$, e determinare in quali casi non sono tutti distinti;
- (3) Trovare condizioni necessarie e sufficienti in termini dei birapporti del punto (2) affinché i birapporti del punto (1) risultino armonici,
- (4) Dualizzare gli enunciati precedenti.

Esercizio 3. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha un piano e una retta uniti sghembi tra loro. Il piano unito contiene esattamente una retta di punti uniti, la retta unita contiene un solo punto unito e non vi sono altri punti uniti.

- (1) Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività,
- (2) e determinare la configurazione di punti, iperpiani, rette e piani uniti.
- (3) Per ogni retta unita, sia P un punto non unito; determinare il birapporto $(P \phi P \phi^2 P \phi^3 P)$. Spiegare perché il risultato è indipendente dal punto P scelto.