seconda prova parziale Geometria 1 parte B - 17 giugno 2024

Il compito va svolto in due ore (40 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, possibilmente su una facciata A4, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta. Alla fine si consegna questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento del compito.

Riportare i seguenti dati sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: _______________ **Nome:** _______________ **Matricola:** ________

Testo del compito:

Esercizio 1. Sono date due rette r, s in un piano proiettivo, e su ciascuna tre punti distinti $R_0, R_1, R_2 \in r$, $S_0, S_1, S_2 \in s$ e distinti dall'intersezione $O = r \wedge s$. Applicando il teorema di Pappo si ottiene la retta di collineazione u passante per i tre punti $U_i = (R_j \vee S_k) \wedge (R_k \vee S_j)$ per $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Poniamo $T_i = u \wedge (R_i \vee S_i)$,

(1) Supponiamo che $O \in u$; allora le tre rette $R_i \vee S_i$ concorrono in un punto A, e mostrare che le quattro rette $r, s, u, O \vee A$ formano una quaterna armonica.
(2) Sotto l'ipotesi del punto precedente, trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché la retta $R_0 \vee S_0$ sia la retta di collineazione per le terne di punti R_1, T_1, S_1 e R_2, T_2, S_2. *[sugg.: considerare i birapporti* $(O\, R_0\, R_1\, R_2)$ *e* $(O\, S_0\, S_1\, S_2)$*]*
(3) Supponiamo che $O \notin u$; determinare sotto quali condizioni la retta $R_0 \vee S_0$ sia la retta di collineazione per le terne di punti R_1, T_1, S_1 e R_2, T_2, S_2. *[sugg.: come sopra, considerare i birapporti dei punti dati sulle rette* r, s*]*

Esercizio 2. Sono date tre rette r, s, t due a due sghembe in uno spazio proiettivo di dimensione 3. Presi quattro punti distinti T_0, T_1, T_2, T_3 di t, siano u_0, u_1, u_2, u_3 le rette per quei punti e incidenti sia r sia s, e siano $R_0, R_1, R_2, R_3 \in r$ e $S_0, S_1, S_2, S_3 \in s$ i punti di incidenza.

(1) mostrare che le quattro trasversali u_i sono due a due sghembe, e che i birapporti $(T_0\, T_1\, T_2\, T_3)$, $(R_0\, R_1\, R_2\, R_3)$, $(S_0\, S_1\, S_2\, S_3)$ sono uguali.
(2) Determinare quali piani intersecano le quattro rette u_0, u_1, u_2, u_3 in punti allineati, e mostrare che il birapporto di tali punti è sempre lo stesso;
(3) Dualizzare tutti gli enunciati trovati.

Esercizio 3. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha una retta e un piano uniti sghembi tra loro. Il piano unito contiene esattamente un punto unito, la retta unita contiene un solo punto unito, e inoltre ϕ possiede una retta di punti uniti.

(1) Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività,
(2) Determinare la configurazione di punti, iperpiani, rette e piani uniti.
(3) Per ogni retta unita per ϕ, siano P, Q punti non uniti; determinare il birapporto $(P\; Q\; \phi P\; \phi Q)$. Per quali coppie di punti tale birapporto è lo stesso?