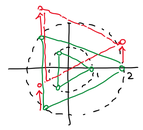
① $(z-i)^3 = 8$

$z - i =$ radici cubiche di $8 = \begin{cases} 2 \\ 2e^{i\pi/3} \\ 2e^{i2\pi/3} \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$

$z = \begin{cases} 2+i & = z_0 \\ -1+(1+\sqrt{3})i & = z_1 \\ -1+(1-\sqrt{3})i & = z_2 \end{cases}$



Ricordando che le rette sono del tipo $\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + c = 0$,
da $\begin{cases} \bar{\alpha} z_0 + \alpha \bar{z}_0 + c = 0 \\ \bar{\alpha} z_1 + \alpha \bar{z}_1 + c = 0 \end{cases}$
troviamo $\alpha = i(z_0 - z_1)$
(a meno di moltiplicare per un reale)
e poi $c = -(\bar{\alpha} z_0 + \alpha \bar{z}_0) = -2\mathrm{Re}(\alpha \bar{z}_0)$
$(= -2\mathrm{Re}(\alpha \bar{z}_1)$ anche ...)
e potremmo calcolare "subito" α, c.
$\alpha = i(2+i-(-1+(1+\sqrt{3})i)) = i(3-\sqrt{3}i) = \sqrt{3}+3i = \sqrt{3}(1+\sqrt{3}i)$
$c = -2\mathrm{Re}((\sqrt{3}+3i)(2-i)) = -2(2\sqrt{3}+3) = \sqrt{3}(-4-2\sqrt{3})$

rette: z_0, z_1: $\begin{vmatrix} z-z_0 & z_1-z_0 \\ \bar{z}-\bar{z}_0 & \bar{z}_1-\bar{z}_0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} z-(2+i) & -3+i\sqrt{3} \\ \bar{z}-(2-i) & -3-i\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$

$z(-3-i\sqrt{3}) - \bar{z}(-3+i\sqrt{3}) + (2+i)(3+i\sqrt{3}) + (2-i)(-3+i\sqrt{3}) = 0$

$z(-3-i\sqrt{3}) - \bar{z}(-3+i\sqrt{3}) + (6+4\sqrt{3})i = 0$

(moltiplico $\frac{1}{\sqrt{3}}$) $\quad z(-1+i\sqrt{3}) + \bar{z}(-1-i\sqrt{3}) + (4+2\sqrt{3}) = 0$

oppure uso la retta per $1, e^{i\pi/3} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
che è $\begin{vmatrix} z-1 & 3-i\sqrt{3} \\ \bar{z}-1 & 3+i\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$ $\quad (3+i\sqrt{3})z - (3-i\sqrt{3})\bar{z} - 2i\sqrt{3} = 0$
$(1-i\sqrt{3})z + (1+i\sqrt{3})\bar{z} - 2 = 0$

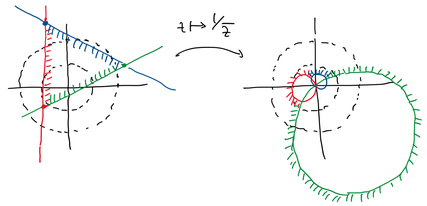
e sostituisco prima $\frac{z}{2}$ invece di z
poi $z-i$ invece di z

z_0, z_2: passo dalla $1, e^{i2\pi/3}$, corrisponde:
$(1+i\sqrt{3})z + (1-i\sqrt{3})\bar{z} - 2 = 0$
sostituisco $z/2$ invece di z:
$(1+i\sqrt{3})z + (1-i\sqrt{3})\bar{z} - 4 = 0$
sostituisco $z-i$ invece di z
$(1+i\sqrt{3})z + (1-i\sqrt{3})\bar{z} - 4 + 2\sqrt{3} = 0$

z_1, z_2 è una retta verticale
$z + \bar{z} + 2 = 0$

Per le circonferenze basta sostituire $\frac{1}{z}$ al posto di z, passano tutte per 0 e si vede il centro dalla equazione:
$z\bar{z} + \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} = 0$
$(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha}) =$ reale positivo
$\uparrow$ centro
raggio $= |\alpha|$ (passa per 0)

L'origine è interna al triangolo z_0, z_1, z_2, quindi tramite inversione i punti interni vanno nei punti ESTERNI a tutte e tre le circonferenze immaginarie:



---

② $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in K \right\}$

$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha+\beta \\ x_4 = \alpha-\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

$U_2: \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in K \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$U_3: \begin{cases} 2x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \\ 2\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in K \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Calcolo $U_1 \cap U_3$: $\begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \end{cases} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$U_1 \cap U_2 = \langle 0 \rangle$ (quindi $U_1 + U_2 = K^4$)

e $\underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{0} + (U_1 \cap U_3) = U_1 \cap U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

in particolare, sono diversi.

Calcolo $U_2 \cap U_3$: $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

dunque $U_2 + U_3 = K^4$
(ovvero $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = K^4$
perché sono vettori lin. indip.)

e $U_1 \cap \underbrace{(U_2 + U_3)}_{K^4} = U_1$

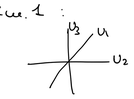
In generale, per confrontare
$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$ e $U_1 \cap (U_2 + U_3)$

osserviamo che:
$U_2 \leq U_2 + U_3 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \leq U_1 \cap (U_2 + U_3)$
$U_3 \leq U_2 + U_3 \Rightarrow U_1 \cap U_3 \leq U_1 \cap (U_2 + U_3)$

e quindi anche la somma $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$
è CONTENUTO in $U_1 \cap (U_2 + U_3)$

L'esempio precedente mostra che non sono necessariamente uguali.

Si può vedere anche nel piano per 3 sottospazi di dim. 1:



$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$ e $U_1 \cap (U_2 + U_3)$
$\langle 0 \rangle + \langle 0 \rangle$ $\quad U_1 \cap K^2$
$\langle 0 \rangle \lneq U_1$

Se $U_1 \leq U_2$ abbiamo:
$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$ e $U_1 \cap \underbrace{(U_2 + U_3)}_{\text{contiene } U_1}$
$U_1 + \underbrace{(U_1 + U_3)}_{\leq U_1}$ $\quad U_1$
U_1 e risultano uguali.

Idem se $U_1 \leq U_3$ per simmetria della espressione.

Vi sono altri casi ovvi, per esempio:
se $U_1 \geq U_2 + U_3$ allora $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) = U_2 + U_3$
$U_1 \cap (U_2 + U_3) = U_2 + U_3$

se $U_1 \cap (U_2 + U_3) = \langle 0 \rangle$ allora abbiamo $\langle 0 \rangle = \langle 0 \rangle$

Nel confrontare i due termini,
contano solo i sottospazi di $U_2 + U_3$,
e non contano i sottospazi di $U_2 \cap U_3$,

quindi possiamo supporre $U_2 + U_3 = V$
e $U_2 \cap U_3 = \langle 0 \rangle$

e dobbiamo confrontare
$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$ con U_1
che è certamente $\leq$
e sono $=$ sse hanno la stessa dimensione
sse $\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 \cap U_3) = \dim(U_1)$
(per Grass: $-\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = 0$ ...)
sse le intersezioni di U_1 con U_2 e U_3 generano tutto U_1.

In generale, detto $\overline{W} = \dfrac{(W \cap (U_2 + U_3)) + (U_2 \cap U_3)}{U_2 \cap U_3}$

abbiamo uguaglianza sse
$\dim(\overline{U_1 \cap U_2}) + \dim(\overline{U_1 \cap U_3}) = \dim \overline{U_1}$

Significa: intersecare con $U_2 + U_3$
(quello che è fuori non conta)
e quozientare con $U_2 \cap U_3$
(quello che è contenuto lì non conta)

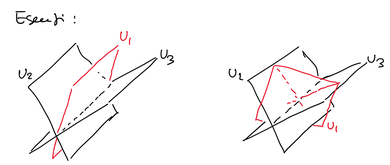
Altra possibilità: "decomponiamo U_1" tenendo cose interne con $U_2 + U_3$ e $U_2 \cap U_3$:

$U_1 = \underbrace{(U_1 \cap (U_2 + U_3))}_{U_1^{int}} \oplus U_1^{est}$ $\quad (U_1^{est} \cap (U_2 + U_3) = \langle 0 \rangle)$
UN COMPLEMENTARE DI U_1^{int} (in U_1)

$U_1^{int} = (U_1 \cap (U_2 \cap U_3)) \oplus U_1'$ $\quad (U_1' \cap (U_2 \cap U_3) = \langle 0 \rangle)$
UN COMPLEMENTARE DI $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ (in U_1^{int})

Allora vale $=$ sse vale $=$ con U_1' invece di U_1
sse $\dim_K(U_1' \cap U_2) + \dim_K(U_1' \cap U_3) = \dim_K(U_1')$

Esempi:



(mi capitano i casi $U_1 \leq U_1 + U_2$,
ma $U_1 \not\leq U_2$, $U_1 \not\leq U_3$, $U_1 \not\leq U_2 \cap U_3$ ...)

---

③ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \mu & \lambda & \mu & 0 \\ 1-\lambda & 1-\mu & 1 & 1 & 1+\mu \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-(1-\lambda)\text{I}]{\text{II}-\lambda\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mu-\lambda & 0 & \mu-\lambda & -\lambda \\ 0 & \lambda-\mu & \lambda & \lambda & \mu+\lambda \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{III}+\text{II}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mu-\lambda & 0 & \mu-\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \mu & \mu \end{pmatrix}$

$\lambda = 0, \mu = 0 \Rightarrow$ rg. inc. $= 1$, rg. compl $= 1$, sol. dim 3, $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda = 0, \mu \neq 0 \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad = 3$, $\quad = 3$, sol dim 1 $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda \neq 0, \lambda = \mu \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$ $\quad = 2$ $\quad = 3$, impossibile $\quad \emptyset$

$\lambda \neq 0, \lambda \neq \mu \Rightarrow$ $\quad = 3$ $\quad = 3$, sol dim 1 $\quad$ fai compl. ort.: $\begin{pmatrix} 1+\frac{\mu}{\lambda} \\ -\frac{\mu}{\lambda} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -\mu \\ -\lambda \\ -\mu \\ \lambda \end{pmatrix} \right\rangle$

Le colonne generano un sottospazio di K^3:

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ 1-\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle =$

op. di Gauss su colonne: tutte-I

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mu-\lambda \\ \lambda-\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mu-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \right\rangle =$

op. di Gauss su colonne: IV − II

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mu-\lambda \\ \lambda-\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \right\rangle$

NOTA: bisogna partire dalla matrice originale, non da quella "elaborata per righe" che cambia lo spazio delle colonne!

dunque: $\lambda = \mu = 0$ $\quad$ solo $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda = \mu \neq 0$ $\quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda \neq \mu$ $\quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(le dimensioni sono quelle di prima
perché rango per riga = rango per colonna).