Ppp-G1B-2022-3

martedì 25 aprile 2023 07:39

① Possiamo supporre $r = O + \langle e_1 \rangle$,

che h = retta di minima distanza sia $O + \langle e_3 \rangle$,

quindi $s = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\d\end{pmatrix}}_{\in h} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix}}_{\perp h} \rangle$ con $\alpha \neq 0$ (altrimenti $s \perp r$ ...) e $\alpha^2+\beta^2=1$ volendo ... e allora $\alpha = \cos\vartheta(r,s)$

Allora $\Gamma = R \sqcup R'$ (unione disgiunta)

con $R = \{\phi$ con matrice $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&-s\\0&0&s&c\end{pmatrix}\}$ $\det=1$

$R' = \{\phi$ con matrice $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&s\\0&0&s&-c\end{pmatrix}\}$ $\det=-1$

dove $c=\cos\vartheta$, $s=\sin\vartheta$ al variare di ϑ.

Quindi $\phi(s) = \phi\begin{pmatrix}0\\0\\d\end{pmatrix} + \langle F\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix}\rangle = \begin{cases}\begin{pmatrix}0\\-ds\\dc\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}\alpha\\\beta c\\\beta s\end{pmatrix}\rangle & \text{se } \phi\in R\\ \begin{pmatrix}0\\ds\\-dc\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}\alpha\\\beta c\\\beta s\end{pmatrix}\rangle & \text{se } \phi\in R'\end{cases}$

Vediamo le posizioni reciproche di s, $\phi(s)$:

se $\phi\in R$:

$$\begin{vmatrix}0&\alpha&\alpha\\ds&\beta&\beta c\\d-dc&0&\beta s\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&\alpha&0\\ds&\beta&\beta(c-1)\\d(1-c)&0&\beta s\end{vmatrix} = \alpha\beta d\left(s^2+(1-c)^2\right) = 2\alpha\beta d(1-c)$$

si annulla solo se $\beta=0$ ($r \parallel s$ e allora $s\parallel\phi(s)$) o se $c=1$ (cioè $\phi=id$)

$|P-\phi(P)$ o $F\sigma|$

altrimenti sono sghembe!

se $\phi\in R'$:

$$\begin{vmatrix}0&\alpha&\alpha\\-ds&\beta&\beta c\\d+dc&0&\beta s\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&\alpha&0\\-ds&\beta&\beta(c-1)\\d(1+c)&0&\beta s\end{vmatrix} = \alpha\beta d\left(-s^2-c^2+1\right) \equiv 0$$

dunque sono sempre incidenti (oppure parallele se $\beta=0$), mai sghembe

In generale: se $\beta=0$ abbiamo $\phi(s)\parallel s$

se $\beta\neq0$ abbiamo $\phi(s), \psi(s)$ $\begin{cases}\text{sghembe se } \phi,\psi\in R \text{ o } \phi,\psi\in R'\\ \text{incidenti se } \phi\in R, \psi\in R' \text{ o viceversa}\end{cases}$

Distanza ed angolo tra s e $\phi(s)$:

se $\phi\in R$ abbiamo

$$d(s,\phi(s)) = \frac{|\det \text{di prima}|}{\left\|\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha\\\beta c\\\beta s\end{pmatrix}\right\|} = \frac{2\alpha\beta d(1-c)}{\left\|\begin{pmatrix}\beta^2 s\\-\alpha\beta s\\\alpha\beta(c-1)\end{pmatrix}\right\|} = \frac{2\alpha\beta d(1-c)}{\beta\sqrt{\underbrace{s^2+\alpha^2(c-1)^2}_{\substack{=1-c^2\\(1-c)(1+c-\alpha^2(1-c))\\1-\alpha^2+c(1+\alpha^2)}}}} = 2\alpha d\frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{1-\alpha^2+c(1+\alpha^2)}}$$

$$\cos\vartheta(s,\phi(s)) = \frac{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\\beta c\\\beta s\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}\alpha\\\beta c\\\beta s\end{pmatrix}\right\|} = \frac{\alpha^2+\beta^2 c}{\alpha^2+\beta^2} = \alpha^2+\beta^2 c$$

se $\phi\in R'$ abbiamo $d(s,\phi(s)) = 0$ (sono incidenti) e angolo come prima!

Nota: abbiamo trovato il caso $r\parallel s$ (allora $s\parallel\phi(s)$, angolo è sempre nullo, e la distanza si misura "sul piano $\perp r$")

e: in generale i punti di minima distanza di s e $\phi(s)$ non sono nel piano per O e $\perp r$!

$\bigcup_{\phi\in\Gamma}\phi(s) = \bigcup_{\phi\in R}\phi(s)$ perché ogni punto delle $\phi(s)$ con $\phi\in R'$ è già anche in quelle $\phi(s)$ con $\phi\in R$ ...

e basta eliminare i parametri t e ϑ da

$\phi\begin{pmatrix}0\\0\\d\end{pmatrix} + \langle F\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix}\rangle = \begin{pmatrix}0\\-ds\\dc\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}\alpha\\\beta c\\\beta s\end{pmatrix}\rangle$

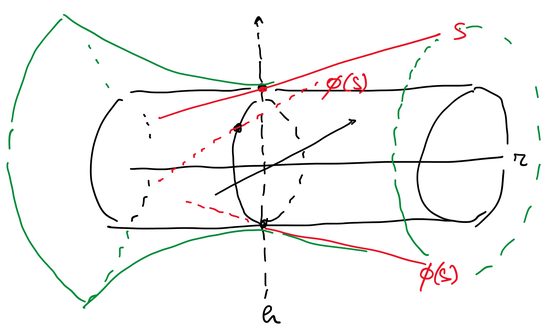
$$\begin{cases}X = \alpha t\\ Y = -d\sin\vartheta + t\beta\cos\vartheta\\ Z = d\cos\vartheta + t\beta\sin\vartheta\end{cases} \rightsquigarrow t = \frac{X}{\alpha}$$

$$\begin{cases}Y = -d\sin\vartheta + \frac{X}{\alpha}\beta\cos\vartheta\\ Z = d\cos\vartheta + \frac{X}{\alpha}\beta\sin\vartheta\end{cases}$$

e sommando i quadrati:

$$Y^2+Z^2 = d^2 + X^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$$

Nota: se $\beta=0$ ($r\parallel s$) viene un cilindro retto di asse r, altrimenti no (la retta s, $\phi(s)$ sono tangenti a quel cilindro ...)



② $\pi = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\rangle$, $r = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\rangle$

$$\begin{vmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\end{vmatrix} = -1 \neq 0$$ dunque r,π sono SGHEMBE e $d(\pi,r) = \frac{|\det\text{ prima}|}{\sqrt{\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{vmatrix}}} = \frac{1}{\sqrt2} = \frac{\sqrt2}{2}$

matrice Gram dei generatori

$\pi \ni P = \begin{pmatrix}1+\alpha\\1+\beta\\\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, $r \ni R = \begin{pmatrix}\gamma\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$P-R \perp \pi, r \iff \begin{pmatrix}1+\alpha-\gamma\\\beta\\\alpha-1\\\beta-1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases}1+\alpha-\gamma=0\\\alpha-1=0\\2\beta-1=0\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha=1\\\beta=1/2\\\gamma=2\end{cases}$

dunque $P_0 = \begin{pmatrix}2\\3/2\\1\\1/2\end{pmatrix}$, $R_0 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $d(\pi,r) = \|P_0-R_0\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}\right\| = \frac{\sqrt2}{2}$

r' = proiezione ortogonale di r su π passante per P_0

con vettore direttore v: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = v + v'$ con $v\parallel\pi$, $v'\perp\pi$

e si trova $v = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$,

dunque $\vartheta(r,r')$ ha coseno $\frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt2} = \frac{\sqrt2}{2}$

e questo angolo dipende solo da r e π, non dai generatori usati per il calcolo.

Nota: in generale sappiamo sempre definire l'angolo tra una RETTA e un SOTTOSPAZIO qualsiasi usando la proiezione ortogonale della retta ...

Distanza ed angolo determinano le posizioni affini:

$d = \begin{cases}0 \longrightarrow \text{incidenti, angolo } \begin{cases}=0 & r\subset\pi\\ \neq0 & r\cap\pi = \text{punto}\end{cases}\\ \neq0 \longrightarrow \text{non incidenti, angolo } \begin{cases}=0 & r\parallel\pi \text{ non } \subseteq\\ \neq0 & r,\pi \text{ sghembi}\end{cases}\end{cases}$

Nota: una retta può essere solo inclusa/incid./parall./sghemba con altri sottospazi.

Distanza ed angolo sono invarianti della posizione euclidea:

dati r,π ed r',π', esiste ISOMETRIA ϕ t.c. $\phi(r)=r'$, $\phi(\pi)=\pi'$ SSE $d(r,\pi)=d(r',\pi')$, $\vartheta(r,\pi)=\vartheta(r',\pi')$

infatti basta vedere che con isometrie si portano nella situazione standard $\pi = O + \langle e_1,e_2\rangle$, $r = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\d\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}0\\\cos\vartheta\\\sin\vartheta\\0\end{pmatrix}\rangle$

(retta minima distanza $h = O+\langle e_4\rangle$ ...)

③ $\underset{P+V_\pi}{\pi}, \underset{Q+V_\sigma}{\sigma}$ piani $\subseteq \mathbb{A}^5(K)$ sghembi tra loro: $\pi\cap\sigma=\emptyset$, $\pi\vee\sigma = \mathbb{A}^5$

Esistono rette che sono sghembe con entrambi:

basta $r = R + \langle v\rangle$ con $R\notin\pi\cup\sigma$ (unione insiemistica $\neq\mathbb{A}^5$)

$v\notin V_\pi$, $v\notin V_\sigma$ ($V_\pi\cup V_\sigma\neq K^5$ ...)

$R-P\notin\langle v\rangle+V_\pi$

$R-Q\notin\langle v\rangle+V_\sigma$

(basta $R\notin P+(\langle v\rangle+V_\pi)$, $\notin Q+(\langle v\rangle+V_\sigma)$ che sono 2 sp. 3-dim la cui unione non è $\mathbb{A}^5$)

Se r è retta sghemba con π e con σ, allora $\dim(r\vee\pi) = 1+2-(-1) = 4$

$\dim(r\vee\sigma) = 1+2-(-1) = 4$

e allora prendendo $S_r := (r\vee\pi)\wedge(r\vee\sigma)$ abbiamo:

S_r contiene r

$S_r \leq (r\vee\pi) \Rightarrow S_r\vee\pi \leq (r\vee\pi)\vee\pi = r\vee\pi \neq \mathbb{A}^5$ (dim 4)

$S_r \leq (r\vee\sigma) \Rightarrow S_r\vee\sigma \leq (r\vee\sigma)\vee\sigma = r\vee\sigma \neq \mathbb{A}^5$

$\dim S_r = 4+4-5 = 3$

uso = perché $r\vee\pi$ e $r\vee\sigma$ si intersecano (contengono almeno r ...)

D'altra parte un S_r con tali proprietà deve essere $\leq r\vee\pi$, $\leq r\vee\sigma$, quindi è l'unico!

Inoltre abbiamo $S_r\vee\pi \leq r\vee\pi$, ma dim $4=4$, dunque $=$

idem $S_r\vee\sigma \leq r\vee\sigma$, ...

Ora S_r,π sono contenuti in $r\vee\pi$

quindi S_r è iperpiano di $r\vee\pi$ (dim 3 dentro a dim 4)

dunque è o parallelo o incidente con π

se incidente $\dim(S_r\cap\pi) = 3+2-4 = 1$ (retta!)

idem per S_r,σ,

ma π e σ non possono essere entrambi paralleli a S_r, perché sono sghembi tra loro!

Conclusione:

- $\pi\parallel S_r$, $\sigma\cap S_r$ = retta $\Rightarrow$ S_r = spazio 2 rette e $\parallel\pi$
- $\pi\cap S_r$ = retta, $\sigma\parallel S_r$ $\Rightarrow$ S_r = spazio 2 rette e $\parallel\sigma$
- $\pi\cap S_r$ = retta, $\sigma\cap S_r$ = retta $\Rightarrow$ sono rette sghembe (π e σ lo sono!) e S_r = retta $\vee$ retta'

(quindi S_r è determinata dalle sue intersezioni con π,σ).