tutti gli argomenti devono essere noti; la difficoltà indicata da $^\bullet$(definizioni, costruzioni e dimostrazioni indispensabili per superare l'esame) e $^{\bullet\bullet}$(definizioni, costruzioni e dimostrazioni da sapere per avere un buon voto).

*Parte A:*

**Numeri Complessi:**

$^\bullet$Definizione del campo $\mathbb{C}$ ed operazioni, piano di Gauss, parti reali e immaginaria, interpretazione geometrica della somma (parallelogramma), coniugio (coordinate hermitiane e relazione con quelle cartesiane) e modulo, numeri complessi di modulo 1, argomento e rappresentazione trigonometrica, interpretazione geometrica del prodotto (rotazioni e dilatazioni).

$^\bullet$Potenze e radici nei numeri complessi, formule di De Moivre, radici dell'unità (poligoni regolari nel cerchio unitario). Teorema fondamentale dell'algebra: versione complessa ($\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso), versione reale (polinomi irriducibili in $\mathbb{R}$ e fattorizzazione).

$^{\bullet\bullet}$Esponenziale complessa, forma esponenziale dei numeri complessi; prodotto, potenze e radici in forma esponenziale; formula di Eulero; logaritmi nei numeri complessi, logaritmo principale.

$^{\bullet\bullet}$Applicazione dei numeri complessi allo studio della geometria del piano euclideo. Distanza tra due punti e angolo tra tre punti (nozione di rapporto semplice, espressione algebrica per il coseno). Teoremi di Carnot e Pitagora. Descrizione di rette e circonferenze con le coordinate hermitiane. Allineamento di tre punti e retta per due punti. Perpendicolarità di segmenti e asse di un segmento. Angoli al centro e angoli alla circonferenza. Punti notevoli dei triangoli: baricentro (mediane), ortocentro (altezze), circocentro (assi), incentro (bisettrici). Teorema della retta di Eulero (bari-, orto- e circocentro allineati e l'incentro vi appartiene sse il triangolo è isoscele). Similitudine di triangoli, triangoli equilateri.

$^{\bullet\bullet}$Trasformazioni di Moebius sui numeri complessi. Definizione (trasformazioni lineari fratte), traslazioni, dilatazioni, affinità, inversione; decomposizione in inversione seguita e preceduta da affinità. Studio delle inversioni (effetto su rette e circonferenze). Proiezione stereografica e uso del simbolo $\infty$ in $\mathbb{C}$. Costruzione delle trasformazioni di Moebius date le immagini di tre punti, invarianza del birapporto.

**Spazi Vettoriali:**

$^\bullet$Definizioni, proprietà algebriche di base, commutatività della somma. Esempi: spazi vettoriali standard, polinomi e polinomi troncati, serie formali, funzioni a valori in un campo. Prodotti di spazi vettoriali. Sottospazi, esempi, criterio per sottospazi. Combinazioni lineari, sottospazi generati, intersezione e somma di sottospazi, struttura di reticolo non distributivo dell'insieme dei sottospazi. Sottospazi complementari e caratterizzazioni. Spazio vettoriale quoziente, proiezione canonica.

$^\bullet$Nozioni di insiemi generatori e linearmente indipendenti o liberi. Basi. Teorema di struttura degli spazi vettoriali: ogni spazio vettoriale ammette basi, e due basi dello stesso spazio hanno la stessa cardinalità. Dimensione. Dimostrazione nel caso di dimensione finita (lemma di scambio). Calcolo delle dimensioni dei prodotti e dei quozienti.

$^\bullet$Coordinate di vettori in una fissata base, equazioni cartesiane di sottospazi (descrizione dei sottospazi tramite generatori, equazioni parametriche, equazioni cartesiane: relazione tra numero minimo di parametri e numero minimo di equazioni cartesiane).

$^\bullet$Formula di Grassmann e conseguenze.

**Applicazioni Lineari e Matrici:**

$^\bullet$Definizione di applicazione lineare. Primi esempi: derivazione, valutazione dei polinomi, applicazioni associate a matrici, proiezioni e simmetrie (asse e direzione come sottospazi complementari).

$^\bullet$Applicazioni Lineari: definizione di nucleo e immagine, nullità e rango, formula delle dimensioni per una funzione lineare. Le funzioni lineari sono determinate dal loro valore su una base del domino, conseguenze per gli endomorfismi di spazi di dimensione finita (equivalenza di iniettività, suriettività, automorfismi). Coordinate associate ad una base come isomorfismo con spazi vettoriali standard. Inverse destre e sinistre di funzioni lineari.

•Applicazioni Lineari e matrici associate: matrici associate ad applicazioni lineari scelte basi dei due spazi. Azione sulle coordinate (nelle basi scelte). Prodotto riga per colonna tra matrici come operazione corrispondente alla composizione di funzioni lineari. Matrici scalari, diagonali, invertibili. Rango di matrici per riga e per colonna. Matrici a blocchi.
•Struttura di algebra delle matrici quadrate e degli endomorfismi. Matrici invertibili come isomorfismi e come cambiamenti di base, relazioni tra le matrici delle stessa applicaziome lineare scritte in basi diverse.
•I tre teoremi di isomorfismo e conseguenze.
••Dualità: definizione di spazio duale, basi duali e dimensione del duale. Covettori come iperpiani dello spazio. Duali di applicazioni lineari e matrici trasposte. Biduale e teorema di bidualità. Ortogonalità e antiisomorfismo involutorio tra reticoli di sottospazi di uno spazio e del suo duale. Nucleo e immagine di funzioni duali (ortogonali di immagine e nucleo della funzione data). Duali di sottospazi e di quozienti.

**Sistemi Lineari**
•Definizioni, teorema di Roché-Capelli. Problema inverso come eliminazione di parametri. Sistemi equivalenti, operazioni e matrici elementari, riduzione di Gauss (matrici scala ridotta speciale), Risoluzione di sistemi lineari. Calcolo dell'inversa di una matrice invertibile, calcolo di inverse destre e sinistre.

**Determinanti**
•Determinanti: motivazioni (sistemi lineari quadrati, indipendenza lineare, calcolo di volumi), definizioni (applicazioni multilineari alternanti, formula esplicita con le permutazioni), moltiplicatività (teorema di Binet) e calcolo alla Gauss, esempi iniziali (matrici di ordine due e tre, diagonali, triangolari, elementari).
•Determinanti: sviluppi di Laplace e applicazioni. Sviluppi con i cofattori alieni, matrice dei cofattori e calcolo della matrice inversa. Regola di Cramer per i sistemi quadrati invertibili. Minori di una matrice e calcolo del rango; principio dei minori orlati e applicazione alle equazioni cartesiane di sottospazi.
•Determinanti notevoli: matrici a blocchi, Vandermonde.

**Forme Canoniche di Matrici:**
•Equivalenza di matrici e classificazione per equivalenza (rango, matrici pseudoidentiche).
•Similitudine di matrici, esempi, autovalori e autovettori, criterio banale di diagonalizzabilità, criterio di triangolarizzabilità, indipendenza di autospazi, polinomio caratteristico (determinante, traccia e altri invarianti, ogni polinomio è polinomio caratteristico, della matrice compagna), molteplicità e nullità di autovalori, primo criterio di diagonalizzabilità. Diagonalizzazione simultanea.
•Matrici e polinomi: mappa di valutazione, teorema di Hamilton-Cayley, polinomio minimo, teorema di decomposizione. Secondo criterio di diagonalizzabilità.
•Decomposizione dello spazio secondo i divisori coprimi del polinomio minimo. Riduzione al caso di potenze di polinomi irriducibili.
•Teoria di Jordan: riduzione al caso di un solo autovalore, riduzione al caso nilpotente. Matrici nilpotenti standard. Studio degli autospazi generalizzati, costruzione di una base in cui la matrice è a blocchi nilpotenti standard. Tipo di nilpotenza di una matrice nilpotente. Rappresentazione tramite diagrammi di Young. Matrici (a blocchi) di Jordan e teorema di Jordan (un endomorfismo ammette matrice in forma di Jordan sse è triangolarizzabile, cioè sse ha tutti gli autovalori nel campo).
•Applicazioni della teoria di Jordan: calcolo delle potenze di una matrice, esponenziale di una matrice, esistenza di vettori ciclici per un endomorfismo.

**Programma del corso di Geometria 1 (a.a. 2021/22)**

*Seconda parte:*

**Geometria Affine:**

•Definizione di spazio affine (insieme con azione fedele e transitiva di uno spazio vettoriale), esempi (spazi affini standard, spazio affine dei complementari di un sottospazio vettoriale).

•Riferimenti affini, punti in posizione generale, coordinate di punti in un riferimento e cambiamenti di riferimento (espressioni matriciali).

•Sottospazi affini, equazioni parametriche e cartesiane in un fissato riferimento.

•Intersezioni e sottospazi affini generati (congiungenti).

•Posizioni reciproche: sottovarietà parallele, incidenti, sghembe, complementari. Criterio di incidenza.

•Teorema di Grassmann affine (disuguaglianza e casi di uguaglianza), fenomeni dovuti al parallelismo.

•Risoluzione di problemi di incidenza (rette trasversali a tre date, generalizzazioni).

•Discussione geometrica di Rouché-Capelli, discussioni delle configurazioni di sottospazi affini in base ai ranghi di matrici complete e incomplete.

•Fasci e stelle di sottospazi affini, casi di iperpiani e rette.

•Calcolo baricentrico: riferimenti baricentrici e coordinate baricentriche dei punti; descrizione baricentrica dei sottospazi affini; caso reale: segmenti, triangoli, simplessi.

••Rapporto semplice, calcolo e azione delle permutazioni sui punti.

••Teoremi di Ceva e Menelao. Teorema di Talete.

•Nozione di trasformazioni affini e affinità (rispettare il calcolo baricentrico, o i rapporti semplici per punti allineati, o avere sovrastante lineare a meno di traslazioni). Notazione vettoriale scelti dei punti come origine. Notazione matriciale scelti dei riferimenti affini.

••Traslazioni, affinità centrali, omotetie, decomposizioni di affinità, cenno al prodotto semidiretto (le traslazioni sono un sottogruppo normale isomorfo allo spazio direttore).

•Omotetie (affinità che manda rette in rette parallele, caratterizzazione matriciale), centro delle omotetie, composizione di omotetie e traslazioni.

•Simmetrie e proiezioni affini. Proiezioni di centro affine.

••Azione delle trasformazioni affini sui sottospazi affini; punti e sottospazi uniti per una affinità.

**Spazi Vettoriali Euclidei ed Hermitiani:**

•Prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$ e hermitiano standard in $\mathbb{C}^n$ , loro proprietà, positività e norma di vettori.

•Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (caso reale e caso hermitiano) e misura di angoli.

•Ortogonalità, teoremi di Pitagora e di Carnot (coseno), proiezione ortogonale.

•Ortogonali di sottospazi e interpretazione euclidea delle equazioni cartesiane. Relazione con gli spazi duali (il prodotto scalare identifica lo spazio con il suo duale).

•Basi ortonormali, metodo di Gram-Schmidt, formula di Parseval.

•Prodotto vettore (cross-product in dimensione $n$ e caso particolare $n = 3$)) e sue proprietà.

•Identità di Lagrange e sue generalizzzazioni, matrici di Gram e formula di Binet-Gram (calcolo di volumi di $r$-edri in $\mathbb{R}^n$)

•Isometrie (applicazioni lineari che rispettano il prodotto scalare, o la norma dei vettori).

•Simmetrie ortogonali e loro matrici, teorema di Cartan-Dieudonné (ogni isometria è composizione di al più tante simmetrie ortogonali quanto la dimensione dello spazio).

•Conformità (applicazioni lineari che rispettano gli angoli, o l'ortogonalità).

•Gruppi ortogonale, ortogonale speciale e conforme, strutture di $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ per $n = 2, 3, 4$. gruppi unitario e unitario speciale, strutture di $U_2(\mathbb{C})$, $SU_2(\mathbb{C})$.

••Rappresentazione delle isomerie dirette in dimensione 3 tramite angoli di Eulero.

••Definizione dei quaternioni di Hamilton e rappresentazione delle isometrie dirette: per coniugio in dimensione 3, per moltiplicazione a sinistra/destra in dimensione 4, relazione dei quaternioni unitari con $SU_2(\mathbb{C})$.

•Teorema spettrale reale (una matrice è simmetrica sse è ortogonalmente diagonalizzabile), e complesso hermitiano (una matrice è normale sse è unitariamente diagonalizzabile). Problemi di spettri (reale per matrici simmetriche/hermitiane, puramente immaginario per matrici antisimmetriche/antihermitiane, unitario per matrici ortogonali/unitarie) e caratterizzazioni corrispondenti.

••Teorema di Schur (triangolarizzazione ortogonale e unitaria).
••Equivalenze ortogonale e unitaria per matrici rettangolari (equivalenza ortogonale per matrici qualsiasi a matrici pseudodiagonali, relazioni con gli autovalori delle matrici simmetriche). Decomposizione polare (ogni matrice quadrata è prodotto di una simmetrica/hermitiana e di una ortogonale/unitaria).

**Geometria Euclidea ed Hermitiana:**
•Definizione di spazi euclidei/hermitiani (spazi affini con spazi di traslazione euclidei/hermitiani), riferimenti euclidei o affini ortonormali.
•Distanza tra punti e tra sottospazi affini, punti di minima distanza e caratterizzazione (congiungente ortogonale ai due sottospazi), calcoli di distanza con rapporto di volumi.
••Interpretazione euclidea di invarianti affini: rapporti semplici e baricentri.
•Calcoli di distanza, aree, volumi ed angoli (in particolare $n = 2, 3, 4$).
•Trasformazioni euclidee: rigidità (dirette e inverse), similitudini (dirette e inverse), traslazioni e decomposizioni con rigidità centrali.
•Classificazione (di Eulero) delle rigidità in dimensioni 2 (rotazioni, traslazioni e riflessioni, glissoriflessioni) e 3 (rotazioni, glissorotazioni, traslazioni e riflessioni, rotoriflessioni, glissoriflessioni). Composizione di rigidità.

**Geometria Proiettiva**
•Omogeneizzazione dei sistemi lineari; introduzione dei punti all'infinito.
•Spazi proiettivi (punteggiati e completi) associati a spazi vettoriali, sottospazi e stelle; riferimenti proiettivi e coordinate omogenee di punto. Modelli degli spazi proiettivi reali e della retta proiettiva complessa. Spazio proiettivo duale, principio di dualità proiettiva, sistemi di riferimento duali, coordinate plückeriane di iperpiano.
•Varietà lineari proiettive (descrizione parametriche e cartesiane), relazioni reciproche (sghembe, incidenti, complementari), problemi di incidenza, formula di Grassmann.
•Retta proiettiva, birapporto (tra numeri e tra punti allineati; azione delle permutazioni), armonia.
•Applicazioni proiettive e proiettività (inclusioni, proiezioni, sezioni, duali); invarianza del birapporto; ricerca di elementi uniti; involuzioni e relazioni con l'armonia (caratterizzazioni di involuzioni sulle rette). Omologie speciali e non speciali; rapporto tra spazi affini e proiettivi (struttura di spazio affine del complementare di un iperpiano; sottospazi proiettivi e affini, condizioni di parallelismo); proiettività e affinità (e traslazioni); nozioni euclidee, punti ciclici, angoli e formula di Laguerre.
•Piano proiettivo e costruzioni classiche: quarto armonico, quadrangolo e quadrilatero piani completi, teorema di Pappo(asse di collineazione, proiettività tra rette nel piano), teorema di Desargues. Proiettività tra rette nello spazio proiettivo.