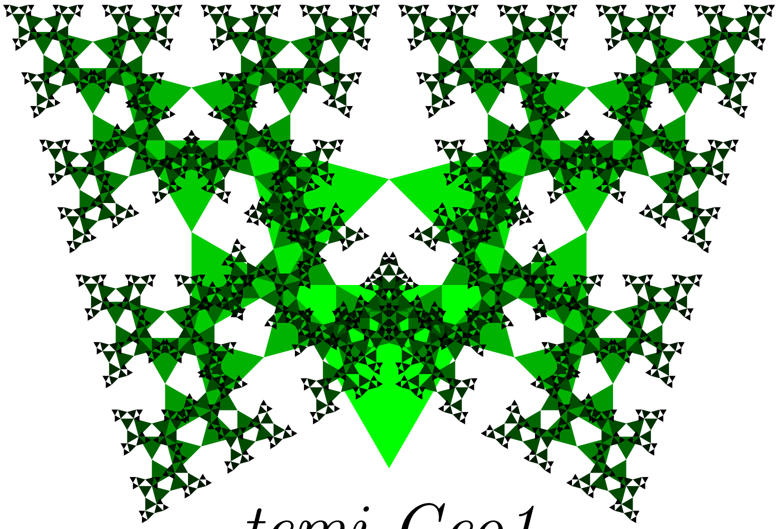
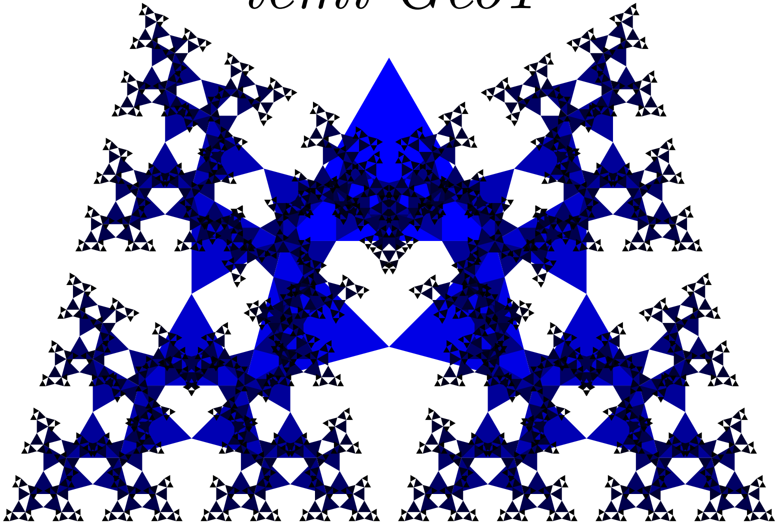
Raccolta esami a.a. 2020/21/22/23

Geometria 1A (Algebra Lineare)
Geometria 1 B (Geometria Affine, Euclidea, Hermitiana, Proiettiva)



temi Geo1



Università di Padova **Dip.Matem.**

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale e trigonometrica le radici cubiche del numero complesso i. Determinare le equazioni hermitiane delle tre rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle tre circonferenze ottenute invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale e trigonometrica le radici cubiche del numero complesso $-i$. Determinare le equazioni hermitiane delle tre rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle tre circonferenze ottenute invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U = \langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_2 + e_3 + e_4 \rangle \qquad \text{e} \qquad V : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ 2X_2 - X_4 = 0 \end{cases}$$

Trovare equazioni cartesiane per U e una base per V. Dimostrare che sono in somma diretta e calcolare la proiezione su U nella direzione V e la simmetria di asse V e direzione U, scrivendone le matrici in base canonica.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U : \begin{cases} X_2 - X_3 = 0 \\ 2X_2 - X_3 - X_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad V = \langle e_1 + e_2 + 2e_3 + 2e_4, e_2 + e_3 + 2e_4 \rangle$$

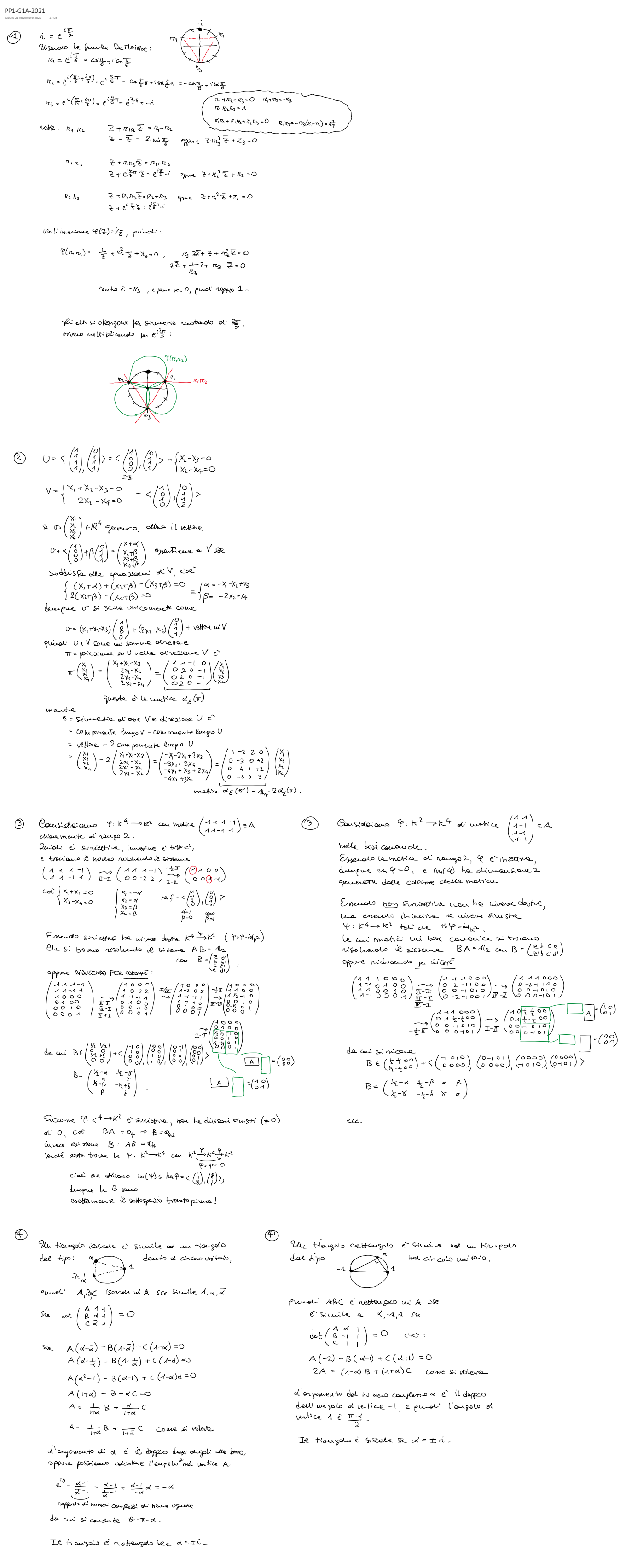
Trovare equazioni cartesiane per V e una base per U. Dimostrare che sono in somma diretta e calcolare la proiezione su U nella direzione V e la simmetria di asse V e direzione U, scrivendone le matrici in base canonica.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $K^4 \to K^2$ di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ nelle basi canoniche. Determinare nucleo e immagine. Determinare tutte le possibili inverse destre/sinistre/bilatere. Determinare tutte le funzioni lineari che composte a destra/sinistra danno la funzione nulla.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $K^2 \to K^4$ di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ nelle basi canoniche. Determinare nucleo e immagine. Determinare tutte le possibili inverse destre/sinistre/bilatere. Determinare tutte le funzioni lineari che composte a destra/sinistra danno la funzione nulla.

Esercizio 4. Si consideri un triangolo di vertici $A, B, C \in \mathbb{C}$. Mostrare che esso è isoscele in A se e solo se esiste un numero complesso unitario α diverso da ± 1 tale che $A = \frac{1}{1+\alpha} B + \frac{1}{1+\overline{\alpha}} C$. Che relazioni vi sono tra α e gli angoli del triangolo? Per quali valori di α il triangolo è rettangolo?

Esercizio 4. Si consideri un triangolo di vertici $A, B, C \in \mathbb{C}$. Mostrare che esso è rettangolo in A se e solo se esiste un numero complesso unitario α diverso da ± 1 tale che $2A = (1 - \alpha)B + (1 + \alpha)C$. Che relazioni vi sono tra α e gli angoli del triangolo? Per quali valori di α il triangolo è isoscele?



PP1-G1A-2021
sabato 21 novembre 2020 17:03

① $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Usando la formula De Moivre:

$r_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

$r_2 = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{5}{6}\pi} = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi = -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

$r_3 = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{9}{6}\pi} = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$

$r_1+r_2+r_3=0$ $\quad r_1+r_2=-r_3$
$r_1r_2r_3 = i$
$r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=0$ $\quad r_1r_2 = -r_3(r_1+r_2) = r_3^2$

rette: $r_1\,r_2$ $\quad z + r_1r_2\bar z = r_1+r_2$
$z - \bar z = 2i\sin\frac{\pi}{6}$ oppure $z + r_3^2\bar z + r_3 = 0$

$r_1\,r_3$ $\quad z + r_1r_3\bar z = r_1+r_3$
$z + e^{i\frac{5}{3}\pi}\bar z = e^{i\frac{\pi}{6}} - i$ oppure $z + r_2^2\bar z + r_2 = 0$

$r_2\,r_3$ $\quad z + r_2r_3\bar z = r_2+r_3$ oppure $z + r_1^2\bar z + r_1 = 0$
$z + e^{i\frac{\pi}{3}}\bar z = e^{i\frac{5}{6}\pi} - i$

uso l'inversione $\varphi(z) = 1/\bar z$, quindi:

$\varphi(r_1r_2)$: $\frac{1}{\bar z} + r_3^2\frac{1}{z} + r_3 = 0$, $\quad r_3 z\bar z + z + r_3^2\bar z = 0$
$z\bar z + \frac{1}{r_3}z + r_3\bar z = 0$

centro è $-r_3$, e passa per 0, quindi raggio 1.

gli altri si ottengono per simmetria ruotando di $\frac{2\pi}{3}$, ovvero moltiplicando per $e^{i\frac{2\pi}{3}}$:

$\varphi(r_1r_2)$ $\quad r_1r_2$

② $U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \underset{I-II}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \begin{cases} x_2-x_3=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$

$V = \begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ 2x_2-x_4=0 \end{cases} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$

se $v = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ generico, allora il vettore

$v + \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+\alpha\\x_2+\beta\\x_3+\beta\\x_4+\beta\end{pmatrix}$ appartiene a V sse

soddisfa alle equazioni di V, cioè

$\begin{cases} (x_1+\alpha)+(x_2+\beta)-(x_3+\beta)=0 \\ 2(x_2+\beta)-(x_4+\beta)=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \alpha = -x_1-x_2+x_3 \\ \beta = -2x_2+x_4 \end{cases}$

dunque v si scrive unicamente come

$v = (x_1+x_2-x_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + (2x_2-x_4)\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ + vettore in V

quindi U e V sono in somma diretta e

π = proiezione su U nella direzione V è

$\pi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2-x_3\\2x_2-x_4\\2x_2-x_4\\2x_2-x_4\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&2&0&-1\\0&2&0&-1\\0&2&0&-1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

questa è la matrice $\alpha_\mathcal{E}(\pi)$

mentre

σ = simmetria di asse V e direzione U è
= componente lungo V − componente lungo U
= vettore − 2 componente lungo U

$= \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}x_1+x_2-x_3\\2x_2-x_4\\2x_2-x_4\\2x_2-x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_1-2x_2+2x_3\\-3x_2+2x_4\\-4x_2+x_3+2x_4\\-4x_2+3x_4\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-1&-2&2&0\\0&-3&0&+2\\0&-4&1&+2\\0&-4&0&3\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

matrice $\alpha_\mathcal{E}(\sigma) = \mathbb{1}_4 - 2\alpha_\mathcal{E}(\pi)$.

③ Consideriamo $\varphi: K^4 \to K^2$ con matrice $\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&1\end{pmatrix} = A$

chiaramente di rango 2.
Quindi è suriettiva, immagine è tutto K^2,
e troviamo il nucleo risolvendo il sistema

$\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&1\end{pmatrix} \underset{II-I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&0&-2&2\end{pmatrix} \xrightarrow[I-II]{-\frac{1}{2}II} \begin{pmatrix}\textcircled{1}&1&0&0\\0&0&\textcircled{1}&-1\end{pmatrix}$

cioè $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3-x_4=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1=-\alpha \\ x_2=\alpha \\ x_3=\beta \\ x_4=\beta \end{cases}$ $\quad \ker f = \left\langle \underset{\alpha=1,\ \beta=0}{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{\alpha=0,\ \beta=1}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}} \right\rangle$

Essendo suriettiva ha inversa destra $K^4 \xrightarrow{\psi} K^2$ $(\varphi\circ\psi = id_{K^2})$
che si trova risolvendo il sistema $AB = \mathbb{1}_2$
con $B = \begin{pmatrix}a&a'\\b&b'\\c&c'\\d&d'\end{pmatrix}$,

oppure RIDUCENDO PER COLONNE:

$\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \underset{\substack{II-I\\III-I\\IV+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&-2&2\\1&-1&-1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \overset{II/III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-2&0&2\\1&-1&-1&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[IV-2II]{-\frac{1}{2}II} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&\frac{1}{2}&-1&0\\0&0&1&0\\0&-\frac{1}{2}&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{I-II} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1&0\\0&0&1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\boxed{A}\,\square = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\boxed{A}\,\square = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

da cui $B \in \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-1&0\\1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix} \right\rangle$

$B = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\alpha & \frac{1}{2}-\gamma\\ \alpha & \gamma\\ \frac{1}{2}+\beta & -\frac{1}{2}+\delta\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$.

Siccome $\varphi: K^4 \to K^2$ è suriettiva, non ha divisori sinistri $(\neq 0)$
di 0, cioè $BA = \mathbb{O}_4 \Rightarrow B = \mathbb{O}_{4,2}$
invece esistono $B: AB = \mathbb{O}_4$
perché basta trovare le $\psi: K^2 \to K^4$ con $K^2 \xrightarrow{\psi} K^4 \xrightarrow{\varphi} K^2$, $\varphi\circ\psi = 0$

cioè che abbiamo $\mathrm{im}(\psi) \subseteq \ker\varphi = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$,
dunque le B sono
esattamente il sottospazio trovato prima!

③' Consideriamo $\varphi: K^2 \to K^4$ di matrice $\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\1&1\\1&-1\end{pmatrix} = A$

nelle basi canoniche.
Essendo la matrice di rango 2, φ è iniettiva,
dunque $\ker\varphi = 0$, e $\mathrm{im}(\varphi)$ ha dimensione 2
generata dalle colonne della matrice

Essendo non suriettiva non ha inversa destra,
ma essendo iniettiva ha inverse sinistre
$\psi: K^4 \to K^2$ tali che $\psi\circ\varphi = id_{K^2}$,
le cui matrici in base canonica si trovano
risolvendo il sistema $BA = \mathbb{1}_2$ con $B = \begin{pmatrix}a&b&c&d\\a'&b'&c'&d'\end{pmatrix}$
oppure riducendo per RIGHE

$\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&-1&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&-1&0&0&0&1\end{pmatrix} \underset{\substack{II-I\\III-I\\IV-I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&-2&-1&1&0&0\\0&0&-1&0&1&0\\0&-2&-1&0&0&1\end{pmatrix} \underset{IV-II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&-2&-1&1&0&0\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&-1&0&1\end{pmatrix}$

$\underset{-\frac{1}{2}II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&-1&0&1\end{pmatrix} \underset{I-II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&-1&0&1\end{pmatrix}$

$\square\,\boxed{A} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\square\,\square = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

da cui si ricava
$B \in \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix} \right\rangle$

$B = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\alpha & \frac{1}{2}-\beta & \alpha & \beta\\ \frac{1}{2}-\gamma & -\frac{1}{2}-\delta & \gamma & \delta\end{pmatrix}$

ecc.

④ Un triangolo isoscele è simile ad un triangolo del tipo: α, 1, $\bar\alpha = \frac{1}{\alpha}$ dentro al cincolo unitario,

quindi A,B,C isoscele in A sse simile $1, \alpha, \bar\alpha$

sse $\det\begin{pmatrix}A&1&1\\B&\alpha&1\\C&\bar\alpha&1\end{pmatrix} = 0$

sse $A(\alpha-\bar\alpha) - B(1-\bar\alpha) + C(1-\alpha) = 0$
$A(\alpha-\frac{1}{\alpha}) - B(1-\frac{1}{\alpha}) + C(1-\alpha) = 0$
$A(\alpha^2-1) - B(\alpha-1) + C(1-\alpha)\alpha = 0$
$A(1+\alpha) - B - \alpha C = 0$
$A = \frac{1}{1+\alpha}B + \frac{\alpha}{1+\alpha}C$
$A = \frac{1}{1+\alpha}B + \frac{1}{1+\bar\alpha}C$ come si voleva

l'argomento di α è il doppio degli angoli alla base,
oppure possiamo calcolare l'angolo ϑ nel vertice A:

$e^{i\vartheta} = \underbrace{\frac{\alpha-1}{\bar\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{\frac{1}{\alpha}-1} = \frac{\alpha-1}{1-\alpha}\alpha = -\alpha$
rapporto di numeri complessi di norma uguale

da cui si conclude $\vartheta = \pi - \alpha$.

Il triangolo è rettangolo sse $\alpha = \pm i$.

④' Un triangolo rettangolo è simile ad un triangolo del tipo -1, α, 1 nel cincolo unitario,

quindi ABC è rettangolo in A sse
è simile a $\alpha, -1, 1$ sse

$\det\begin{pmatrix}A&\alpha&1\\B&-1&1\\C&1&1\end{pmatrix} = 0$ cioè:

$A(-2) - B(\alpha-1) + C(\alpha+1) = 0$
$2A = (1-\alpha)B + (1+\alpha)C$ come si voleva

l'argomento del numero complesso α è il doppio dell'angolo di vertice −1, e quindi l'angolo di vertice 1 è $\frac{\pi-\alpha}{2}$.

Il triangolo è isoscele se $\alpha = \pm i$.

Testo del compito:

Esercizio 1. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine n)

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} x_i e_{ii}+\sum_{i=1}^{n-1} e_{in}+\sum_{i=1}^{n-1} e_{ni}=\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & x_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x_n \end{pmatrix}$$

(tutte le entrate non scritte sono nulle) e discutere la diagonalizzabilità della matrice $B_n=\sum_{i=1}^{n-1} e_{in}+\sum_{i=1}^{n-1} e_{ni}$.

Esercizio 1. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine n)

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} x_i e_{ii}+\sum_{i=2}^{n} e_{i1}+\sum_{i=2}^{n} e_{1i}=\begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & x_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}$$

(tutte le entrate non scritte sono nulle) e discutere la diagonalizzabilità della matrice $B_n=\sum_{i=2}^{n} e_{i1}+\sum_{i=2}^{n} e_{1i}$.

Esercizio 2. Consideriamo la funzione lineare ϕ di matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ nella base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

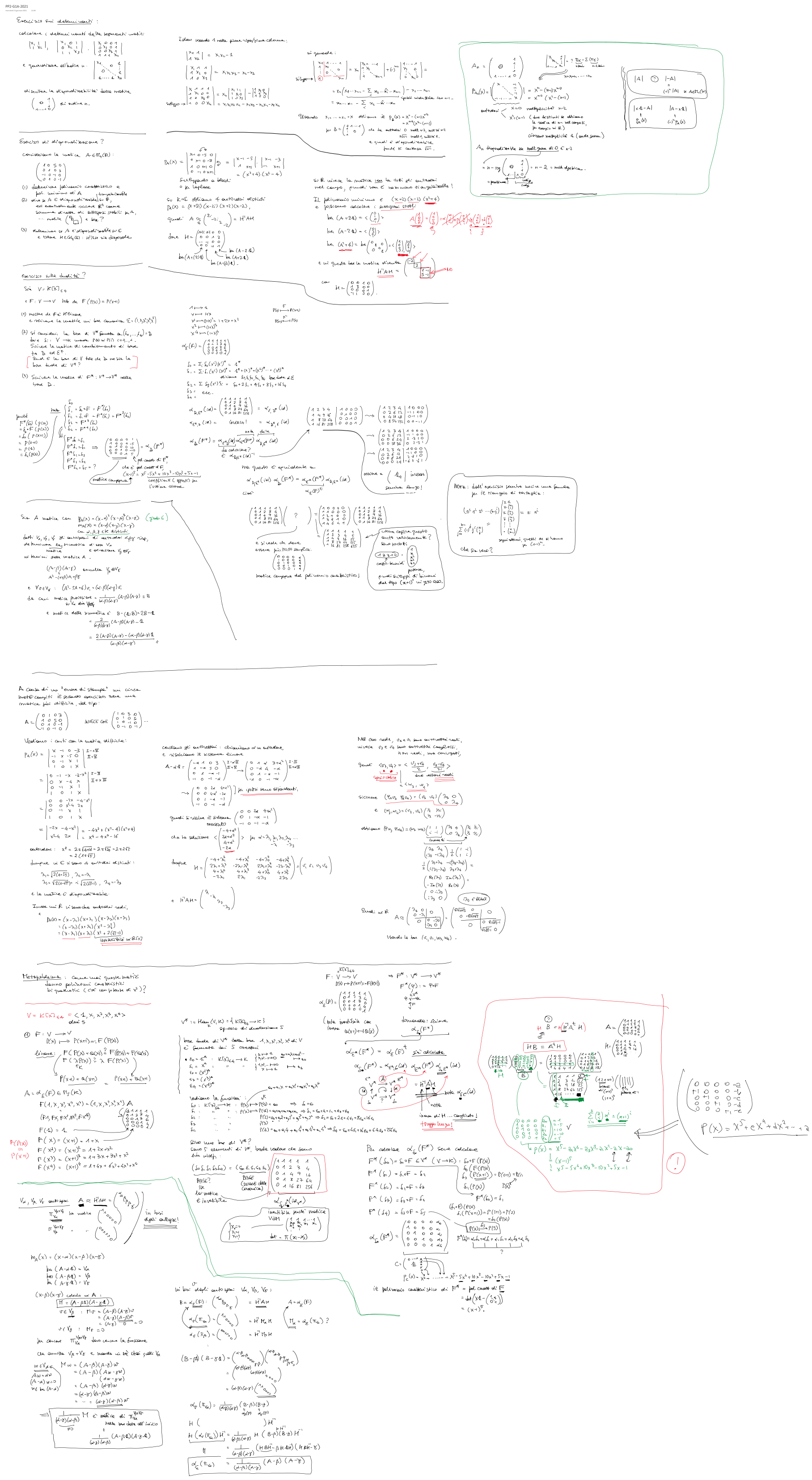
(1) determinare i polinomi caratteristico e minimo di A;
(2) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;
(3) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ ed eventualmente identificare i sottospazi stabili per A corrispondenti ai divisori del polinomio minimo e scrivere la matrice di ϕ usando una base ottenuta unendo basi dei sottospazi stabili trovati.

Esercizio 3. Sia $V=K[X]_{\leq 4}$ e consideriamo la funzione $F:V\to V$ definita da $F(p(X))=p(X+1)$.
(1) Mostrare che F è lineare e scriverne la matrice nella base canonica $\mathcal{E}$ di V.
(2) Si considerino in V^* gli elementi $\delta_i:V\to K$ dati da $\delta_i(p(x))=p(i)$ per $i=0,1,2,3,4$; mostrare che formano una base $\mathcal{D}$ di V^* e scrivere la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{D}$ a $\mathcal{E}^*$ (duale di $\mathcal{E}$).
(3) Scrivere la matrice di $F^*:V^*\to V^*$ nella base $\mathcal{D}$.

Esercizio 3. Sia $V=K[X]_{\leq 4}$ e consideriamo la funzione $F:V\to V$ definita da $F(p(X))=p(X+1)$.
(1) Mostrare che F è lineare e scriverne la matrice nella base canonica $\mathcal{E}$ di V.
(2) Si considerino in V^* gli elementi $\delta_i:V\to K$ dati da $\delta_i(p(x))=p(i)$ per $i=0,1,2,3,4$; mostrare che formano una base $\mathcal{D}$ di V^* e scrivere la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{D}$ a $\mathcal{E}^*$ (duale di $\mathcal{E}$).
(3) Scrivere la matrice di $F^*:V^*\to V^*$ nella base $\mathcal{D}$.

Esercizio 4. Sia A una matrice con polinomio minimo $(X-1)(X+2)(X-4)$. Determinare in funzione di A le matrici delle simmetrie di asse uno degli autospazi e direzione la somma degli altri due.

Esercizio 4. Sia A una matrice con polinomio minimo $(X+1)(X-2)(X+4)$. Determinare in funzione di A le matrici delle simmetrie di asse uno degli autospazi e direzione la somma degli altri due.



Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e cartesiana le radici quarte del numero complesso -4. Determinare le equazioni hermitiane delle sei rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 2. Sia $V = M_n(K)$ lo spazio delle matrici d'ordine n e coefficienti in K. Consideriamo i sottinsiemi V_c delle matrici tali che per ogni colonna la somma delle entrate sia nulla e V_r delle matrici tali che per ogni riga la somma delle entrate sia nulla. Mostrare che sono sottospazi. Determinare dimensioni e basi per V_c, V_r, $V_c \cap V_r$, $V_c + V_r$. Qual è il massimo rango possibile per matrici in questi sottospazi?

Esercizio 3. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine n)

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_{ii} + \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} = \begin{pmatrix} x_1{+}1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x_2{+}1 & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & x_{n-1}{+}1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x_n{+}1 \end{pmatrix}$$

(tutte le entrate non scritte sono 1) e discutere la diagonalizzabilità della matrice $B_n = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}$.

Esercizio 4. Consideriamo la funzione lineare ϕ di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ nella base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

(1) determinare i polinomi caratteristico e minimo di A;
(2) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;
(3) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ ed eventualmente identificare i sottospazi stabili per A corrispondenti ai divisori del polinomio minimo e scrivere la matrice di ϕ usando una base ottenuta unendo basi dei sottospazi stabili trovati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e cartesiana le radici (complesse) del polinomio reale Z^4+6Z^2+25. Determinare le equazioni hermitiane delle sei rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno. *[sugg.:* $=(Z^4+10Z^2+25)-4Z^2=(Z^2+5)^2-4Z^2=\cdots$*]*

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U=\langle e_1+e_2, e_2+e_3, e_3+e_4\rangle \qquad \text{e} \qquad V:\begin{cases} X_1+X_2+X_3=0\\ X_2+X_3+X_4=0\\ X_2+X_3=0\end{cases}$$

Trovare equazioni cartesiane per U e una base per V. Dimostrare che sono in somma diretta e calcolare la proiezione su U nella direzione V e la simmetria di asse V e direzione U, scrivendone le matrici in base canonica.

Esercizio 3. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine n)

$$A_n=\sum_{i=1}^n x_ie_{ii}+\sum_{i,j=1}^n e_{ij}\delta_{i+j,\text{dispari}}=\begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ & x_2 & & & \\ & & x_3 & & \\ & & & x_4 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \dots\\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots\\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(dove $\delta_{i+j,\text{dispari}}$ vale 1 se $i+j$ è dispari, 0 altrimenti) e discutere la diagonalizzabilità della matrice $B_n=\sum_{i,j=1}^n e_{ij}\delta_{i+j,\text{dispari}}$.

Esercizio 4. Consideriamo la funzione lineare ϕ di matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ nella base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

(1) determinare i polinomi caratteristico e minimo di A;

(2) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;

(3) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ ed eventualmente identificare i sottospazi stabili per A corrispondenti ai divisori del polinomio minimo e scrivere la matrice di ϕ usando una base ottenuta unendo basi dei sottospazi stabili trovati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e cartesiana le radici del polinomio $Z^3 - 2Z - 4$. Determinare le equazioni hermitiane delle tre rette che passano per tali punti e della circonferenza per i tre punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 2. Sia $V = K[X]_{\leq 4}$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 4 e coefficienti in K. Consideriamo i sottinsiemi V_p dei polinomi che si annullano in 0, 2 e -2 e V_d dei polinomi che si annullano in 1 e -1. Mostrare che sono sottospazi. Determinare dimensioni e basi per V_p, V_d, $V_p \cap V_d$, $V_p + V_d$. Se possibile, scrivere le matrici nella base canonica $1, X, X^2, X^3, X^4$ delle simmetrie aventi assi e direzioni questi due sottospazi.

Esercizio 3. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine n)

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1}(e_{i,i+1} + e_{i+1,i}) = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & x_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n \end{pmatrix}$$

(tutte le entrate fuori dalle tre diagonali centrali sono nulle) e discutere la diagonalizzabilità della matrice $B_n = \sum_{i=1}^{n-1}(e_{i,i+1} + e_{i+1,i})$.

Esercizio 4. Consideriamo la funzione lineare ϕ di matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ nella base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

(1) determinare i polinomi caratteristico e minimo di A;
(2) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;
(3) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ ed eventualmente identificare i sottospazi stabili per A corrispondenti ai divisori del polinomio minimo e scrivere la matrice di ϕ usando una base ottenuta unendo basi dei sottospazi stabili trovati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e cartesiana le radici dell'equazione $(Z-1)^3=8$. Determinare le equazioni hermitiane delle tre rette che passano per tali punti e della circonferenza per i tre punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 2. Sia $V=V_6(K)$ e consideriamo due sottospazi U e W in somma diretta $(V=U\oplus W)$ con $\dim_K U=3$. Sia $H=\{\phi\in\operatorname{End}_K(V):\phi(U)\subseteq W,\ \phi(W)\subseteq U\}$. Mostrare che H è un sottospazio di $\operatorname{End}_K(V)$, determinarne una base e la dimensione. È vero che $H'=\{\phi\in\operatorname{End}_K(V):\phi(U)\subseteq U,\ \phi(W)\subseteq W\}$ è un complementare di H? Trovare tutti i complementari di H in $\operatorname{End}_K(V)$.

Esercizio 3. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine n)

$$A_n=\sum_{i=1}^n x_ie_{ii}+\sum_{i=1}^n e_{i,n-i+1}=\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & x_2 & \iddots & 1 & 0\\ \vdots & \ddots & * & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \iddots & x_{n-1} & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}$$

e discutere la diagonalizzabilità della matrice $B_n=\sum_{i=1}^n e_{i,n-i+1}$

Esercizio 4. Consideriamo la funzione lineare ϕ di matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ nella base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

(1) determinare i polinomi caratteristico e minimo di A;

(2) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;

(3) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ ed eventualmente identificare i sottospazi stabili per A corrispondenti ai divisori del polinomio minimo e scrivere la matrice di ϕ usando una base ottenuta unendo basi dei sottospazi stabili trovati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e cartesiana le radici dell'equazione $(Z-1)^3 = -Z^3$. Determinare le equazioni hermitiane delle tre rette che passano per tali punti e della circonferenza per i tre punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 2. Sia $V = M_4(K)$ e consideriamo i due sottospazi U formato dalle matrici a diagonali costanti (cioè $a_{ij} = a_{i'j'}$ se $i - j = i' - j'$) e W formato dalle matrici con antidiagonali costanti (cioè $a_{ij} = a_{i'j'}$ se $i + j = i' + j'$). Determinare basi, dimensioni ed equazioni cartesiane per $U, W, U \cap W, U + W$. Determinare un complementare di $U + W$ in V.

Esercizio 3. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine $n = 2m$)

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i e_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_i e_{i,n-i+1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \ddots & b_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots\!\!\!\!\!\!\iddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n-1} & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ b_n & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

e discutere la diagonalizzabilità della matrice.

Esercizio 4. Consideriamo la funzione lineare ϕ di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nella base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

(1) determinare i polinomi caratteristico e minimo di A;
(2) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;
(3) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ ed eventualmente identificare i sottospazi stabili per A corrispondenti ai divisori del polinomio minimo e scrivere la matrice di ϕ usando una base ottenuta unendo basi dei sottospazi stabili trovati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e cartesiana le radici dell'equazione $(Z-1)^3 = 8$. Determinare le equazioni hermitiane delle tre rette che passano per tali punti e della circonferenza per i tre punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 2. Sia $V = M_n(K)$ con n pari, e consideriamo i seguenti due sottospazi: U formato dalle matrici tali che $a_{ij} = 0$ per $i \geq j$, e W formato dalle matrici tali che $a_{ij} = 0$ per $i + j > n$. Determinare basi, dimensioni ed equazioni cartesiane per $U, W, U \cap W, U + W$. Determinare un complementare di $U + W$ in V.

Esercizio 3. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine n)

$$A_n = \sum_{i=1}^{n-1} a e_{i,i+1} + \sum_{i=2}^{n} b e_{i,i-1} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & 0 & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

e discutere la diagonalizzabilità della matrice.

Esercizio 4. Consideriamo la funzione lineare ϕ di matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ nella base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

(1) determinare i polinomi caratteristico e minimo di A;

(2) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;

(3) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ ed eventualmente identificare i sottospazi stabili per A corrispondenti ai divisori del polinomio minimo e scrivere la matrice di ϕ usando una base ottenuta unendo basi dei sottospazi stabili trovati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare la forma di Jordan di ϕ e delle sue potenze. Trovare tutte le basi di K^5 jordanizzanti per ϕ.

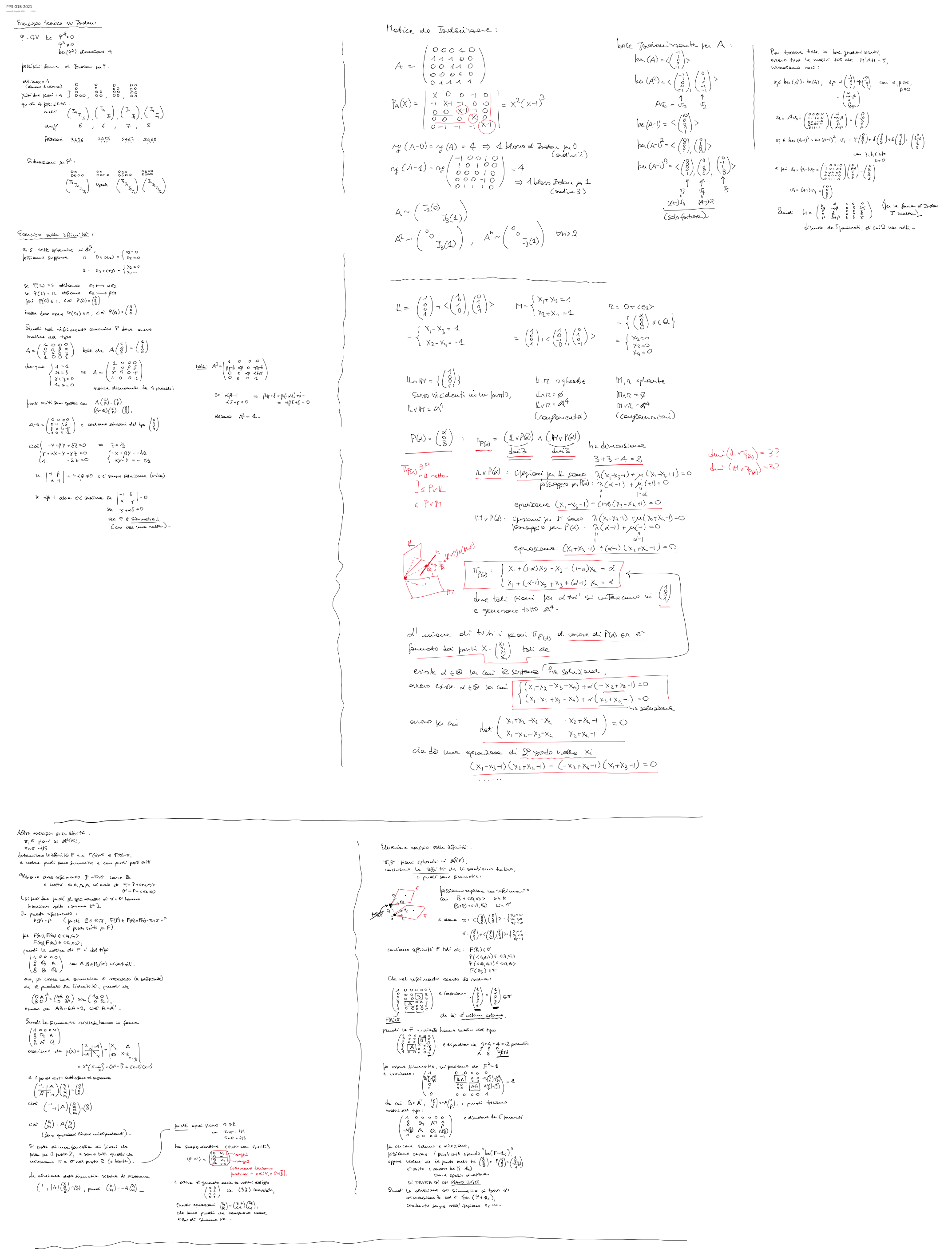
Esercizio 2. Un endomorfismo ϕ di uno spazio vettoriale V di dimensione finita su K è tale che $\phi^4 = 0$, $\phi^3 \neq 0$ e $\dim_K \ker \phi^2 = 4$. Determinare le possibili forme di Jordan per ϕ (specificando anche le possibili dimensioni di V) e per ϕ^2.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ dotato del riferimento canonico, consideriamo i sottospazi

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad \mathbb{M} = \begin{cases} X_1 + X_3 = 1 \\ X_2 + X_4 = 1 \end{cases} \quad , \quad r = O + \langle e_1 \rangle .$$

Determinare le posizioni reciproche (due a due) di $\mathbb{L}$, $\mathbb{M}$ ed r. Per ogni punto P della retta r determinare il piano π_P per P tale che $\mathbb{L} \vee \pi_P$ e $\mathbb{M} \vee \pi_P$ hanno dimensione 3. Descrivere con una equazione cartesiana l'insieme formato dall'unione di tali piani.

Esercizio 4. Siano dati due piani π, σ sghembi in $\mathbb{A}^5(K)$. Descrivere tutte le affinità F tali che $F(\pi) = \sigma$ e $F(\sigma) = \pi$, determinare sotto quali condizioni si tratta di simmetrie, e in questo caso determinarne assi e direzioni.



Matrice di Jordanizzare:

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0 \\ 1&1&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(X) = \begin{vmatrix} X&0&0&-1&0 \\ -1&X-1&-1&0&0 \\ 0&0&X-1&-1&0 \\ 0&0&0&X&0 \\ 0&-1&-1&-1&X-1 \end{vmatrix} = X^2(X-1)^3$$

$rg(A-0) = rg(A) = 4 \Rightarrow$ 1 blocco di Jordan per 0 (ordine 2)

$$rg(A-1) = rg\begin{pmatrix} -1&0&0&1&0 \\ 1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&-1&0 \\ 0&1&1&1&0 \end{pmatrix} = 4$$

$\Rightarrow$ 1 blocco Jordan per 1 (ordine 3)

$$A \sim \begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_3(1) \end{pmatrix}$$

$$A^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & J_3(1) \end{pmatrix}, \quad A^n \sim \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & J_3(1) \end{pmatrix} \quad \forall n \geq 2.$$

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \begin{cases} X_1 - X_3 = 1 \\ X_2 - X_4 = -1 \end{cases}$$

$$\mathbb{M} = \begin{cases} X_1 + X_3 = 1 \\ X_2 + X_4 = 1 \end{cases} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$r = 0 + \langle e_1 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\\0\end{pmatrix} \alpha \in \mathbb{Q} \right\} = \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}$$

$\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ sono incidenti in un punto, $\mathbb{L} \vee \mathbb{M} = \mathbb{A}^4$

$\mathbb{L}, r$ sghembe $\mathbb{L} \cap r = \emptyset$ $\mathbb{L} \vee r = \mathbb{A}^4$ (complementari)

$\mathbb{M}, r$ sghembe $\mathbb{M} \cap r = \emptyset$ $\mathbb{M} \vee r = \mathbb{A}^4$ (complementari)

$P(\alpha) = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\\0\end{pmatrix}$: $\pi_{P(\alpha)} = \underbrace{(\mathbb{L} \vee P(\alpha))}_{\dim 3} \wedge \underbrace{(\mathbb{M} \vee P(\alpha))}_{\dim 3}$ ha dimensione $3+3-4=2$

$\dim(\mathbb{L} \vee \pi_{P(\alpha)}) = 3?$

$\dim(\mathbb{M} \vee \pi_{P(\alpha)}) = 3?$

$\pi_{P(\alpha)} \ni P$ $\cap \mathbb{L}$ retta] $\leq P \vee \mathbb{L}$ $\leq P \vee \mathbb{M}$

$\mathbb{L} \vee P(\alpha)$: iperpiani per $\mathbb{L}$ sono $\lambda(x_1 - x_3 - 1) + \mu(x_2 - x_4 + 1) = 0$
passaggio per $P(\alpha)$: $\lambda(\alpha - 1) + \mu(+1) = 0$, $\lambda = 1$, $\mu = 1-\alpha$

equazione $(x_1 - x_3 - 1) + (1-\alpha)(x_2 - x_4 + 1) = 0$

$\mathbb{M} \vee P(\alpha)$: iperpiani per $\mathbb{M}$ sono $\lambda(x_1 + x_3 - 1) + \mu(x_2 + x_4 - 1) = 0$
passaggio per $P(\alpha)$: $\lambda(\alpha - 1) + \mu(-1) = 0$, $\lambda = 1$, $\mu = \alpha - 1$

equazione $(x_1 + x_3 - 1) + (\alpha - 1)(x_2 + x_4 - 1) = 0$

$$\boxed{\pi_{P(\alpha)} : \begin{cases} X_1 + (1-\alpha)X_2 - X_3 - (1-\alpha)X_4 = \alpha \\ X_1 + (\alpha-1)X_2 + X_3 + (\alpha-1)X_4 = \alpha \end{cases}}$$

due tali piani per $\alpha \neq \alpha'$ si intersecano in $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ e generano tutto $\mathbb{A}^4$.

L'unione di tutti i piani $\pi_{P(\alpha)}$ al variare di $P(\alpha) \in r$ è formato dai punti $X = \begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\end{pmatrix}$ tali che

esiste $\alpha \in \mathbb{Q}$ per cui il sistema ha soluzioni,

ovvero esiste $\alpha \in \mathbb{Q}$ per cui $\begin{cases} (X_1 + X_2 - X_3 - X_4) + \alpha(-X_2 + X_4 - 1) = 0 \\ (X_1 - X_2 + X_3 - X_4) + \alpha(X_2 + X_4 - 1) = 0 \end{cases}$ ha soluzione

ovvero per cui $\det\begin{pmatrix} X_1 + X_2 - X_3 - X_4 & -X_2 + X_4 - 1 \\ X_1 - X_2 + X_3 - X_4 & X_2 + X_4 - 1 \end{pmatrix} = 0$

che dà una equazione di 2° grado nelle x_i

$(x_1 - x_3 - 1)(x_2 + x_4 - 1) - (-x_2 + x_4 - 1)(x_1 + x_3 - 1) = 0$

......

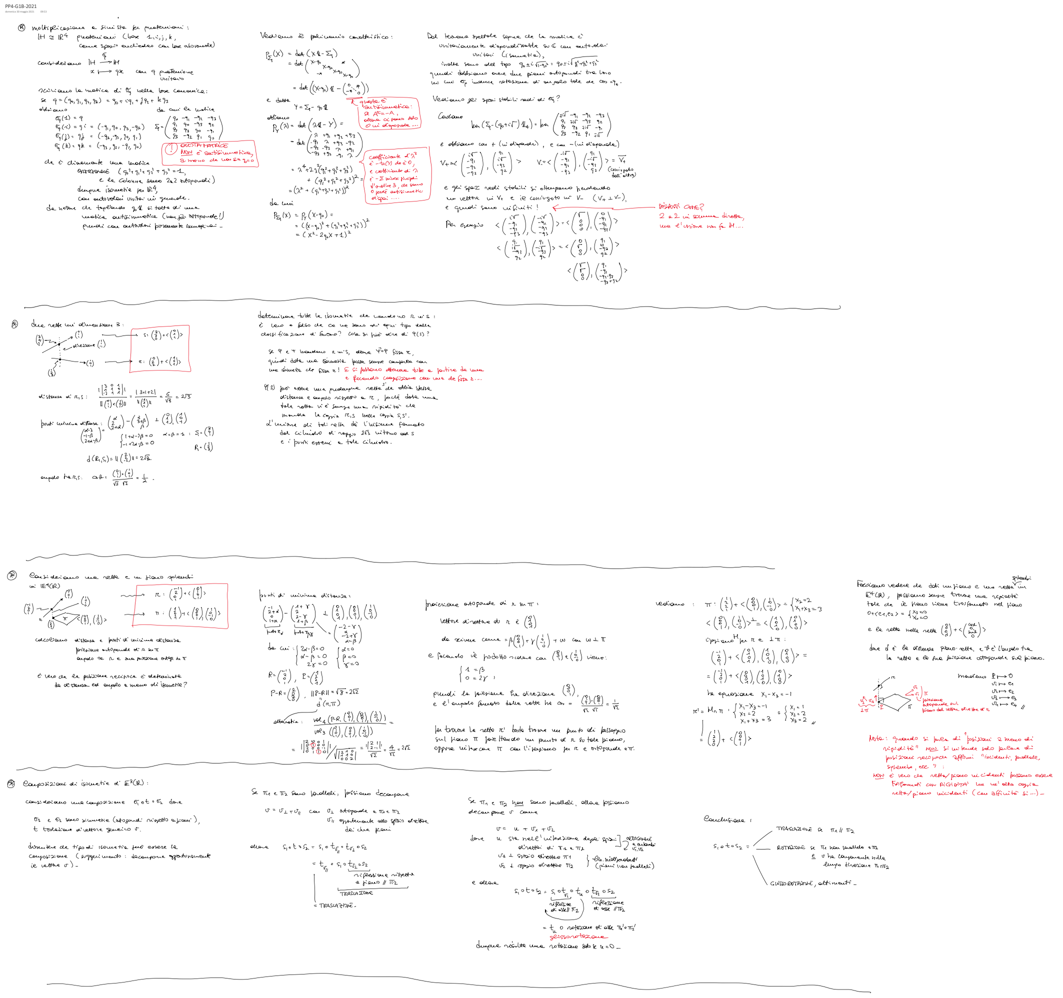
Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ sono date le due rette $r : \left(\begin{smallmatrix}0\\2\\2\end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$ e $s : \left(\begin{smallmatrix}3\\3\\0\end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$. Determinare posizione reciproca, distanza, angolo, punti di minima distanza. Determinare tutte le rigidità ϕ tali che $\phi(r) = s$ e descrivere l'insieme formato dall'unione dalle rette $\phi(s)$ al variare di ϕ.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ sono dati la retta $r : \left(\begin{smallmatrix}-1\\2\\0\\1\end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$ e il piano $\pi : \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\\1\end{smallmatrix}\right) + \langle\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)\rangle$. Determinare posizione reciproca, distanza, punti di minima distanza. Sia r' la proiezione ortogonale di r su π; determinare r' e l'angolo tra r ed r'. È vero che distanza e tale angolo determinano la posizione reciproca di retta e piano in $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ a meno di rigidità (eventualmente, spiegare in che senso)?

Esercizio 3. Siano s_1 e s_2 simmetrie ortogonali rispetto a due piani π_1 e π_2 in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, e sia t_v la traslazione di vettore v. Determinare che tipo di rigidità, secondo la classificazione di Eulero, risulta la composizione $s_1 \circ t_v \circ s_2$, discutendo in particolare quando risulta una traslazione o una rotazione. *[sugg.: distinguere il caso di piani paralleli o incidenti, e decomporre opportunamente il vettore v.]*

Esercizio 4. Consideriamo il corpo dei quaternioni $\mathbb{H}$ identificato con lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ usando la base canonica $1, i, j, k$ (come base ortonormale). Per ogni quaternione unitario $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ (con i coefficienti q_i reali) sia $\sigma_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ la moltiplicazione a sinistra per q, cioè $\sigma_q(x) = qx$. Scrivere la matrice di σ_q nella base canonica e verificare che si tratta di una isometria diretta. Determinare polinomio caratteristico e spazi reali stabili di σ_q.



PP4-G1B-2021
domenica 30 maggio 2021 09:53

⊛ moltiplicazione a sinistra per quaternioni:

$\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ quaternioni (base $1, i, j, k$, come spazio euclideo con base ortonormale)

consideriamo $\mathbb{H} \xrightarrow{\sigma_q} \mathbb{H}$, $x \longmapsto qx$ con q quaternione unitario

scriviamo la matrice di σ_q nella base canonica:
se $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$
otteniamo

$\sigma_q(1) = q$
$\sigma_q(i) = qi = (-q_1, q_0, q_3, -q_2)$
$\sigma_q(j) = qj = (-q_2, -q_3, q_0, q_1)$
$\sigma_q(k) = qk = (-q_3, q_2, -q_1, q_0)$

da cui la matrice

$$\Sigma_q = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

(!) QUESTA MATRICE NON è antisimmetrica, a meno che non sia $q_0 = 0$

che è chiaramente una matrice ORTOGONALE ($q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$, e le colonne sono 2 a 2 ortogonali)
dunque isometrie per $\mathbb{R}^4$, con autovalori unitari in generale.
da notare che togliendo $q_0\mathbb{1}$ si tratta di una matrice antisimmetrica (non più ortogonale!) quindi con autovalori puramente immaginari.

Vediamo il polinomio caratteristico:

$$p_{\Sigma_q}(X) = \det(X\mathbb{1} - \Sigma_q) = \det\begin{pmatrix} X-q_0 & & & * \\ & X-q_0 & & \\ & & X-q_0 & \\ -* & & & X-q_0 \end{pmatrix} = \det\left((X-q_0)\mathbb{1} - \begin{pmatrix} 0 & \ddots & * \\ -* & \ddots & 0 \end{pmatrix}\right)$$

e detta $Y = \Sigma_q - q_0\mathbb{1}$

questa è antisimmetrica: se $A^t = -A$, allora ci sono solo 0 in diagonale...

otteniamo

$$p_Y(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{1} - Y) = \det\begin{pmatrix} \lambda & +q_1 & +q_2 & +q_3 \\ -q_1 & \lambda & +q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & \lambda & +q_1 \\ -q_3 & +q_2 & -q_1 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^4 + 2\lambda^2(q_1^2+q_2^2+q_3^2) + (q_1^2+q_2^2+q_3^2)^2 = (\lambda^2 + (q_1^2+q_2^2+q_3^2))^2$$

coefficiente di λ^3 è $-\mathrm{tr}(Y)$ che è 0, e coefficiente di λ è $-\Sigma$ minori principali d'ordine 3, che sono 0 perché antisimmetrici dispari....

da cui

$$p_{\Sigma_q}(X) = p_Y(X - q_0) = ((X-q_0)^2 + (q_1^2+q_2^2+q_3^2))^2 = (X^2 - 2q_0X + 1)^2$$

Dal teorema spettrale sappiamo che la matrice è unitariamente diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ con autovalori unitari (isometria),
inoltre sono del tipo $q_0 \pm i\sqrt{1-q_0^2} = q_0 \pm i\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}$
quindi dobbiamo avere due piani ortogonali tra loro in cui σ_p induce rotazione di angolo tale che $\cos = q_0$.

Vediamo gli spazi stabili reali di σ_q?

Cerchiamo

$$\ker(\Sigma_q - (q_0 + i\sqrt{\ })\mathbb{1}_4) = \ker\begin{pmatrix} \mp i\sqrt{\ } & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & \mp i\sqrt{\ } & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & \mp i\sqrt{\ } & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & \mp i\sqrt{\ } \end{pmatrix}$$

e otteniamo con $+$ (in dipende), e con $-$ (in dipende)

$$V_+ = \left\langle \begin{pmatrix} i\sqrt{\ } \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ i\sqrt{\ } \\ -q_3 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad V_- = \left\langle \begin{pmatrix} -i\sqrt{\ } \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ -i\sqrt{\ } \\ -q_3 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \overline{V_+}$$

(coniugato dell'altro)

e gli spazi reali stabili si ottengono prendendo un vettore in V_+ e il coniugato in V_- ($V_+ \perp V_-$), e quindi sono infiniti!

DISPARI COME? 2 a 2 in somma diretta, ma l'unione non fa $\mathbb{H}$....

Per esempio

$$\left\langle \begin{pmatrix} i\sqrt{\ } \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i\sqrt{\ } \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{\ } \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ i\sqrt{\ } \\ -q_3 \\ q_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ -i\sqrt{\ } \\ -q_3 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\ } \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \\ -q_2 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{\ } \\ \sqrt{\ } \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ -q_1 \\ -q_2-q_3 \\ -q_3+q_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

⊛ due rette in dimensione 3:

$s: \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$r: \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

distanza di r, s:

$$\frac{\left|\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right|}{\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|} = \frac{|3+1+2|}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\|} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

punti minima distanza:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 2+\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3+\beta \\ \beta \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha-3 \\ -1-\beta \\ 2+\alpha-\beta \end{pmatrix} = \qquad \begin{cases} 1+\alpha-2\beta = 0 \\ -1+2\alpha-\beta = 0 \end{cases} \qquad \alpha = \beta = 1: \quad S_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$d(R_1, S_1) = \left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\| = 2\sqrt{3}$$

angolo tra r, s: $\cos\theta = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.

determinare tutte le isometrie che mandano r in s: è vero o falso che ce ne sono di ogni tipo della classificazione di Euclide? Cosa si può dire di $\varphi(s)$?

se φ e ψ mandano r in s, allora $\psi^{-1}\circ\varphi$ fissa r, quindi data una isometria possono sempre comporla con una isometria che fissa r! E si possono ottenere tutte a partire da una e facendo composizione con una che fissa r...

$\varphi(s)$ può essere una qualunque retta s' che abbia stessa distanza e angolo rispetto a r, perché data una tale retta vi è sempre una rigidità che manda la coppia r, s nella coppia s, s'.
L'unione di tali rette dà l'insieme formato dal cilindro di raggio $2\sqrt{3}$ intorno ad s e i punti esterni a tale cilindro.

⊛ Consideriamo una retta e un piano sghembi in $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$

$r: \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\pi: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

calcoliamo distanza e punti di minima distanza
proiezione ortogonale di r su π
angolo tra r e sua proiezione ortog. su π

è vero che la posizione reciproca è determinata da distanza ed angolo a meno di isometrie?

punti di minima distanza:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2+\alpha \\ 0 \\ 1+\alpha \end{pmatrix}}_{\text{punto } r_\alpha} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1+\gamma \\ 2 \\ 2-\gamma \\ 1+\beta \end{pmatrix}}_{\text{punto } \pi_{\beta\gamma}} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2-\gamma \\ \alpha \\ -2+\gamma \\ \alpha-\beta \end{pmatrix}$$

da cui: $\begin{cases} 2\alpha-\beta = 0 \\ \alpha-\beta = 0 \\ 2\gamma = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$

$R = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P - R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|P-R\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = d(r, \pi)$

alternativa:

$$\frac{\mathrm{vol}_4\left(P-R, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}{\mathrm{vol}_3\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)} =$$

$$= \left|\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right| \Big/ \sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\left|\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

proiezione ortogonale di r su π:

vettore direttore di r è $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

da scrivere come $= \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + w$ con $w \perp \pi$

e facendo il prodotto scalare con $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ viene:

$$\begin{cases} 1 = \beta \\ 0 = 2\gamma \end{cases},$$

quindi la proiezione ha direzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
e l'angolo formato dalle rette ha $\cos = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}\,\sqrt{1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

per trovare la retta r' basta trovare un punto di passaggio sul piano π proiettando un punto di r su tale piano, oppure intersecare π con l'iperpiano per r e ortogonale a π.

vediamo: $\pi: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$

$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

l'iperpiano H per r e $\perp\pi$:

$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

ha equazione $x_1 - x_3 = -1$

$r' = H \cap \pi: \begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$ //

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Facciamo vedere che dati un piano e una retta sghembi in $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$, possiamo sempre trovare una rigidità tale che il piano viene trasformato nel piano $O + \langle e_1, e_2 \rangle = \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

e la retta nella retta $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ 0 \\ \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

dove d è la distanza piano-retta, e ϑ è l'angolo tra la retta e la sua proiezione ortogonale sul piano.

mandiamo
$P \longmapsto O$
$v_1 \longmapsto e_1$
$v_2 \longmapsto e_2$
$v_3 \longmapsto e_3$
$v_4 \longmapsto e_4$ //

Nota: quando si parla di "posizioni a meno di rigidità" NON si intende solo parlare di posizioni reciproche affini "incidenti, parallele, sghembe, etc.":
NON è vero che retta/piano incidenti possono essere trasformati con RIGIDITA' in un'altra coppia retta/piano incidenti (con affinità sì...)

⊛ Composizioni di isometrie di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$:

consideriamo una composizione $\sigma_1 \circ t \circ \sigma_2$ dove

σ_1 e σ_2 sono simmetrie (ortogonali rispetto a piani),
t traslazione di vettore generico v.

discutere che tipo di isometria può essere la composizione (suggerimento: decomporre opportunamente il vettore v).

Se π_1 e π_2 sono paralleli, possiamo decomporre

$v = v_\perp + v_\parallel$ con $v_\perp$ ortogonale a π_1 e π_2
$v_\parallel$ appartenente allo spazio direttore dei due piani

allora

$$s_1 \circ t \circ s_2 = s_1 \circ t_{v_\parallel} \circ t_{v_\perp} \circ s_2 = t_{v_\parallel} \circ \underbrace{s_1 \circ \underbrace{t_{v_\perp} \circ s_2}_{\text{riflessione rispetto a piano} \parallel \pi_2}}_{\text{TRASLAZIONE}}$$

$=$ TRASLAZIONE.

Se π_1 e π_2 non sono paralleli, allora possiamo decomporre v come

$v = u + v_1 + v_2$
dove u sta nell'intersezione degli spazi direttori di π_1 e π_2] ORTOGONALE a entrambi v_1, v_2
$v_1 \perp$ spazio direttore π_1
$v_2 \perp$ spazio direttore π_2 } lin. indipendenti (piani non paralleli)

e allora

$$s_1 \circ t \circ s_2 = \underbrace{s_1 \circ t_{v_1}}_{\substack{\text{riflessione} \\ \text{di asse} \parallel \pi_1}} \circ t_u \circ \underbrace{t_{v_2} \circ s_2}_{\substack{\text{riflessione} \\ \text{di asse} \parallel \pi_2}}$$

$= t_u \circ$ rotazione di asse $\pi_1' \circ \pi_2'$
glissorotazione

dunque risulta una rotazione solo se $u = 0$.

Conclusione:

$s_1 \circ t \circ s_2 =$
- TRASLAZIONE se $\pi_1 \parallel \pi_2$
- ROTAZIONE se π_1 non parallelo a π_2 e v ha componente nulla lungo direzione $\pi_1 \cap \pi_2$
- GLISSOROTAZIONE, altrimenti.

Testo del compito:

Esercizio 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in base canonica. Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autospazi di ϕ, una matrice di Jordan J e una matrice invertibile P tali che $P^{-1}AP = J$. Si determinino le forme di Jordan delle potenze di A e di $A - \mathbb{I}$. Quante sono le forme canoniche di Jordan aventi stesso polinomio minimo e stessa dimensione dell'autospazio proprio di A?

Esercizio 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$ si considerino le sottovarietà lineari

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{e} \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Si determinino dimensione e posizione reciproca di r e π e un sistema di equazioni cartesiane per ciascuna delle due sottovarietà lineari. Mostrare che per ogni punto P non appartenente a r o π esiste una unica retta r_P passante per P e non sghemba sia con r che con π. Discutere le posizioni reciproche di tali rette al variare del punto P. Descrivere tramite una equazione cartesiana l'unione di tali rette al variare del punto P sulla retta $X_4 - 1 = X_3 = X_2 - 1 = 0$.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ sono dati due rette e un piano:

$$r = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{e} \quad \pi = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

Per ogni coppia di sottospazi, si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza, l'angolo tra loro. Si determinino le proiezioni ortogonali di r ed s su π, il loro punto di intersezione e l'angolo tra loro.

Esercizio 4. Discutere in termini della classificazione di Eulero la composizione di due rotazioni (di assi rette) in $\mathbb{E}^3$, distinguendo in quali casi si ottengono rotazioni o traslazioni. È vero che ogni rigidità diretta di $\mathbb{E}^3$ si scrive come composizione di al più due rotazioni?

Testo del compito:

Esercizio 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ in base canonica. Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autospazi di ϕ, una matrice di Jordan J e una matrice invertibile P tali che $P^{-1}AP = J$. Si determinino le forme di Jordan delle potenze di A e di $A - \mathbb{I}$. Quante sono le forme canoniche di Jordan aventi stesso polinomio minimo e stessa dimensione dell'autospazio proprio di A?

Esercizio 2. In uno spazio affine di dimensione 5 sono dati due piani complementari π e σ. Mostrare che per ogni punto P non appartenente a nessuno dei due piani esiste una unica retta r_P passante per P e incidente o parallela con π e σ, specificando per quali punti P la retta r_P è incidente entrambi, e per quali risulta parallela a π o a σ o a entrambi. Discutere le posizioni reciproche di tali rette al variare del punto P. In $\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$ siano dati

$$\pi = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle, \quad \sigma = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{ed i punti} \quad P(\lambda) = \begin{pmatrix}0\\\lambda\\0\\1+\lambda\\0\end{pmatrix}.$$

Calcolare le rette $r_{P(\lambda)}$ e descrivere tramite equazioni cartesiane l'unione di tali rette al variare di λ.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono date le due rette

$$r = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad s = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle.$$

Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza. Trovare le equazioni cartesiane dei sottospazi di dimensione 3 che contengono sia r sia s. Se possibile trovare i piani che intersecano sia r che s e che siano ortogonali ad entrambe.

Esercizio 4. Discutere in termini della classificazione di Eulero in $\mathbb{E}^3$ la composizione di una rotazione di angolo π (di asse una retta) e di una riflessione (di asse un piano), distinguendo in quali casi si ottengono riflessioni e rotoriflessioni. È vero che ogni rigidità inversa di $\mathbb{E}^3$ si scrive come tale composizione?

Testo del compito:

Esercizio 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ in base canonica. Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autospazi di ϕ, una matrice di Jordan J e una matrice invertibile P tali che $P^{-1}AP = J$. Si determinino le forme di Jordan delle potenze di A e di $A - \mathbb{I}$. Si determinino, se ne esistono, i vettori ciclici per ϕ e per le sue potenze. Quali sono le forme canoniche di Jordan aventi stesso polinomio minimo di A?

Esercizio 2. In uno spazio affine di dimensione 5 sono date tre rette r, s, t tali che $r \vee s \vee t$ sia tutto lo spazio. Mostrare che le rette sono due a due sghembe. Esistono rette che siano non sghembe con tutte e tre date r, s, t? Determinare le affinità che mandano ciascuna delle rette r, s, t in sè. Esistono affinità che permutano le tre rette tra di loro?

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati i due piani

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{e} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza. Si può definire un angolo tra i due piani (spiegare perché ed eventualmente calcolarlo)?

Esercizio 4. Discutere in termini della classificazione di Eulero in $\mathbb{E}^3$ la composizione di due rotazioni di angolo π (ciascuna di asse una retta). *[sugg.: distinguere a seconda della posizione reciproca dei due assi.]* È vero che ogni rigidità diretta di $\mathbb{E}^3$ si scrive come tale composizione?

Testo del compito:

Esercizio 1. Sia ϕ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione n con polinomio minimo $(X-1)^3(X+1)^2$ e tale che entrambi gli autospazi propri hanno dimensione 2. Determinare le possibili forme canoniche di Jordan di ϕ, specificando anche l'ordine della matrici e le sequenze delle dimensioni degli autospazi generalizzati.

Esercizio 2. In uno spazio affine di dimensione 5 sono dati i due sottospazi

$$\sigma : \begin{cases} X_2 - X_3 = -2 \\ X_4 - X_5 = -2 \end{cases} \qquad r : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Determinare le posizioni reciproche. Mostrare che per ogni punto dello spazio che non appartenga a $\sigma \cup r$ esiste una unica retta per quel punto e incidente o parallela sia con σ che con r. Esistono rette che siano parallele sia con σ che con r? Esistono rette che siano sghembe sia con σ che con r?

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati i due piani

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{e} \quad \sigma = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Si determini la posizione reciproca, e in particolare il più piccolo sottospazio affine che li contiene entrambi. Si può definire un angolo tra i due piani (spiegare perché ed eventualmente calcolarlo)?

Esercizio 4. Discutere in termini della classificazione di Eulero in $\mathbb{E}^3$ la composizione di due riflessioni (ciascuna di asse un piano). *[sugg.: distinguere a seconda della posizione reciproca dei due assi.]* È vero che ogni rigidità diretta di $\mathbb{E}^3$ si scrive come tale composizione?

Testo del compito:

Esercizio 1. Si consideri la matrice nilpotente standard N_{11} di ordine 11. Trovare la forma di Jordan di tutte le sue potenze.

Caratterizzare quali matrici nilpotenti sono potenze di una matrice avente polinomio minimo e caratteristico uguali.

Esercizio 2. In uno spazio affine di dimensione 5 sono dati i due sottospazi

$$\sigma : \begin{cases} X_2 - X_3 = -2 \\ X_1 - X_5 = -2 \end{cases} \qquad r : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Determinare le posizioni reciproche. Mostrare che per ogni punto dello spazio che non appartenga a $\sigma \cup r$ esiste una unica retta per quel punto e incidente o parallela sia con σ che con r. Esistono rette che siano parallele sia con σ che con r? Esistono rette che siano sghembe sia con σ che con r?

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati i due piani

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{e} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle .$$

Si determini la posizione reciproca, e in particolare il più piccolo sottospazio affine che li contiene entrambi. Si può definire un angolo tra i due piani (spiegare perché ed eventualmente calcolarlo)?

Esercizio 4. Discutere in termini della classificazione di Eulero in $\mathbb{E}^3$ la composizione di due rotazioni di angolo $\pi/2$ attorno a due rette ortogonali tra loro. *[sugg.: distinguere a seconda della posizione reciproca dei due assi.]* Quali rigidità di $\mathbb{E}^3$ si scrivono come tale composizione?

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale e trigonometrica le radici cubiche del numero complesso $-1+i$. Determinare equazioni cartesiane ed hermitiane delle rette per l'origine e le tre radici trovate. Determinare l'equazione hermitiana del cerchio contenente le tre radici. Rappresentare il tutto nel piano di Gauss.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U = \langle e_1 + e_3 + e_4 \ , \ e_3 - e_4 \rangle \qquad \text{e} \qquad V : \begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ X_2 - X_4 = 0 \end{cases}$$

Trovare equazioni cartesiane per U e una base per V. Dimostrare che sono in somma diretta e calcolare la proiezione su U nella direzione V e la simmetria di asse V e direzione U, scrivendone le matrici in base canonica.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $K^3 \to K^4$ di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ nelle basi canoniche. Determinare nucleo e immagine. Determinare tutte le possibili inverse destre/sinistre. Determinare tutte le funzioni lineari che composte a destra/sinistra danno la funzione nulla.

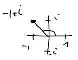
Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $K^3 \to K^4$ di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ nelle basi canoniche. Determinare nucleo e immagine. Determinare tutte le possibili inverse destre/sinistre. Determinare tutte le funzioni lineari che composte a destra/sinistra danno la funzione nulla.

Esercizio 4. Sia U (risp. V) il sottospazio dello spazio di matrici $M_3(K)$ tali che le tre righe sono uguali tra loro (risp. le colonne sono uguali tra loro). Determinare basi, dimensioni ed equazioni cartesiane di U, V, $U \cap V$, $U + V$. Esiste un sottospazio complementare sia di U che di V?

Ppp-G1A-2021-2

domenica 28 novembre 2021 10:36

① radici cubiche di $-1+i$,
rette per queste e l'origine.



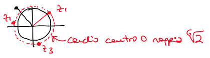
$$-1+i = \underbrace{\sqrt{2}}_{\rho}\ \mathrm{cis}\Big(\underbrace{\tfrac{3\pi}{4}}_{\vartheta}\Big) = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}\right)$$

radici cubiche sono $\rho^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\vartheta+2\pi k}{3}\right)$ con $k=0,1,2$:

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\ \mathrm{cis}(\pi/4) = \sqrt[6]{2}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} z_2 = \sqrt[6]{2}\ \mathrm{cis}(11\pi/12) &= \sqrt[6]{2}\ \mathrm{cis}(\pi/4)\,\mathrm{cis}(2\pi/3) \\ &= \sqrt[6]{2}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}+i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \sqrt[6]{2}\Big(\underbrace{\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{4}-\tfrac{\sqrt{6}}{4}\right)}_{\cos(\frac{11\pi}{12})} + i\underbrace{\left(\tfrac{\sqrt{6}}{4}-\tfrac{\sqrt{2}}{4}\right)}_{\sin(\frac{11\pi}{12})}\Big) \end{aligned}$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\ \mathrm{cis}(19\pi/12) = \cdots$$



retta per 0 e z_1: $y = x$

$(1+i)z + (1-i)\overline{z} = 0$

retta per 0 e z_2: basta ruotare la precedente di $\frac{2\pi}{3}$, cioè sostituire z con $\mathrm{cis}(-\frac{2\pi}{3})z$.

retta per 0 e z_3: …

② standard

③ standard: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi_A : K^3 \to K^4$

$\mathrm{im}(A) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$ non è suriettiva,
non ha inversa destra.

$\ker(A) = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ non è iniettiva,
non ha inversa sinistra.

$AB = \mathbb{O}$ sse $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_r \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_r \end{pmatrix}$,
$$\begin{tikzcd} K^r \arrow[r, "\varphi_B"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & K^3 \arrow[r, "\varphi_A"] & K^4 \end{tikzcd}$$

$(\mathrm{im}(B) \subseteq \ker(A) \dots)$

$CA = \mathbb{O}$ sse $C = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -a_1 & -b_1 \\ a_2 & b_2 & -a_2 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_r & b_r & -a_r & -b_r \end{pmatrix}$
$$\begin{tikzcd} K^3 \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & K^4 \arrow[r, "\varphi_C"] & K^r \end{tikzcd}$$

④ <u>simpatico</u>: $\dim_K(M_3(K)) = 9$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \in M_3(K) \mid a,b,c \in K \right\}$$
$$= \left\{ a\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} \mid a,b,c \in K \right\}$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix} \right\rangle$$

sono matrici lin. indip., quindi $\dim_K U = 3$,
e ha 6 equazioni cartesiane indipendenti $(9-3)$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix} \in M_3(K) \mid a,b,c \in K \right\}$$
$$= \left\{ a\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} \mid a,b,c \in K \right\}$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix} \right\rangle$$

stesse conclusioni, $\dim_K V = 3$

$$U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} a&a&a\\a&a&a\\a&a&a \end{pmatrix} \mid a \in K \right\} = \left\{ a\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \mid a \in K \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \right\rangle$$

"tutte le righe e colonne sono uguali", $\dim_K(U \cap V) = 1$, ha $9-1=8$ eq. cartesiane

$$\dim_K(U+V) = \dim_K(U) + \dim_K(V) - \dim_K(U \cap V) = 3+3-1 = 5$$

$U+V = \langle$ "si possono unire le due basi ed eliminare una qualsiasi delle 6 matrici" $\rangle$

ha $9-5=4$ equazioni cartesiane:
dalle parametriche

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\alpha & b+\alpha & c+\alpha \\ a+\beta & b+\beta & c+\beta \\ a & b & c \end{pmatrix}$$ per esempio,

possiamo ottenere

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{31}+\alpha & x_{32}+\alpha & x_{33}+\alpha \\ x_{31}+\beta & x_{32}+\beta & x_{33}+\beta \end{pmatrix}$$

e infine

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{31}+(x_{13}-x_{33}) & x_{32}+(x_{13}-x_{33}) \\ x_{31}+(x_{23}-x_{33}) & x_{32}+(x_{13}-x_{33}) \end{pmatrix}$$

che dà 4 equazioni cartesiane.

le matrici che hanno 0 in diagonale:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ d & 0 & c \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e,f \in K \right\}$$
$$= \langle e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{23}, e_{31}, e_{32} \rangle$$

sono uno spazio vettoriale di dimensione 6,
hanno

$W \cap U = \langle 0 \rangle$ "righe tutte $= 0$"

$W \cap V = \langle 0 \rangle$ "colonne tutte $= 0$",

quindi è complementare sia di U che di V.

Naturalmente non è l'unico, ce ne sono molti!

<u>alternativa</u>:

usando $M_3(K) \simeq K^9$ $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{11}\\x_{12}\\x_{13}\\x_{21}\\x_{22}\\x_{23}\\x_{31}\\x_{32}\\x_{33} \end{pmatrix}$

abbiamo:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

con equazioni: $\langle (1\,0\,0\,{-1}\,0\,0\,0\,0\,0), (1\,0\,0\,0\,0\,0\,{-1}\,0\,0),$
$(0\,1\,0\,0\,{-1}\,0\,0\,0\,0), (0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,{-1}\,0),$
$(0\,0\,1\,0\,0\,{-1}\,0\,0\,0), (0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,{-1}) \rangle = U^\perp$

$$V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

con equazioni: $\langle (1\,{-1}\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0), (1\,0\,{-1}\,0\,0\,0\,0\,0\,0),$
$(0\,0\,0\,1\,{-1}\,0\,0\,0\,0), (0\,0\,0\,1\,0\,{-1}\,0\,0\,0),$
$(0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,{-1}\,0), (0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,{-1}) \rangle = V^\perp$

$$U \cap V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

con equazioni $U^\perp + V^\perp = \langle (1\,{-1}\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0),$
$(1\,0\,{-1}\,0\,0\,0\,0\,0\,0),$
$(1\,0\,0\,{-1}\,0\,0\,0\,0\,0),$
$(1\,0\,0\,0\,{-1}\,0\,0\,0\,0),$
$(1\,0\,0\,0\,0\,{-1}\,0\,0\,0),$
$(1\,0\,0\,0\,0\,0\,{-1}\,0\,0),$
$(1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,{-1}\,0),$
$(1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,{-1}) \rangle$

$$U + V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \underline{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \text{“tolto uno qualsiasi”} \right\rangle$$

con equazioni $U^\perp \cap V^\perp = \langle (1\,{-1}\,0\,{-1}\,1\,0\,0\,0\,0),$
$(1\,0\,{-1}\,{-1}\,0\,1\,0\,0\,0),$
$(1\,{-1}\,{-1}\,0\,0\,0\,{-1}\,1\,0),$
$(1\,0\,{-1}\,0\,0\,0\,{-1}\,0\,1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1}&0&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&\textcircled{1}&0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&\textcircled{1}&0&0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&\textcircled{1}&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&\textcircled{1}&1&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

lo spazio W con equazioni

$W^\perp = \langle (1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0),$
$(0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0),$
$(0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1) \rangle$

ha chiaramente $W^\perp + U^\perp =$ tutto
$W^\perp + V^\perp =$ tutto

quindi W è complementare di U e V.

Testo del compito:

Esercizio 1. Si considerino le seguenti matrici (di ordine n)

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i + y_j)e_{ij} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & \cdots & x_1 + y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n + y_1 & \cdots & x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Calcolare determinanti e ranghi nei casi $n = 2, 3, 4$, specificando sotto quali condizioni il rango è esattamente 1. Generalizzare al caso n.

Esercizio 2. Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(1) determinare il polinomio caratteristico $p_A(X)$ e il polinomio minimo $m_A(X)$ di A;

(2) discutere la diagonalizzabilità di A su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale; discutere la diagonalizzabilità di A su $\mathbb{R}$;

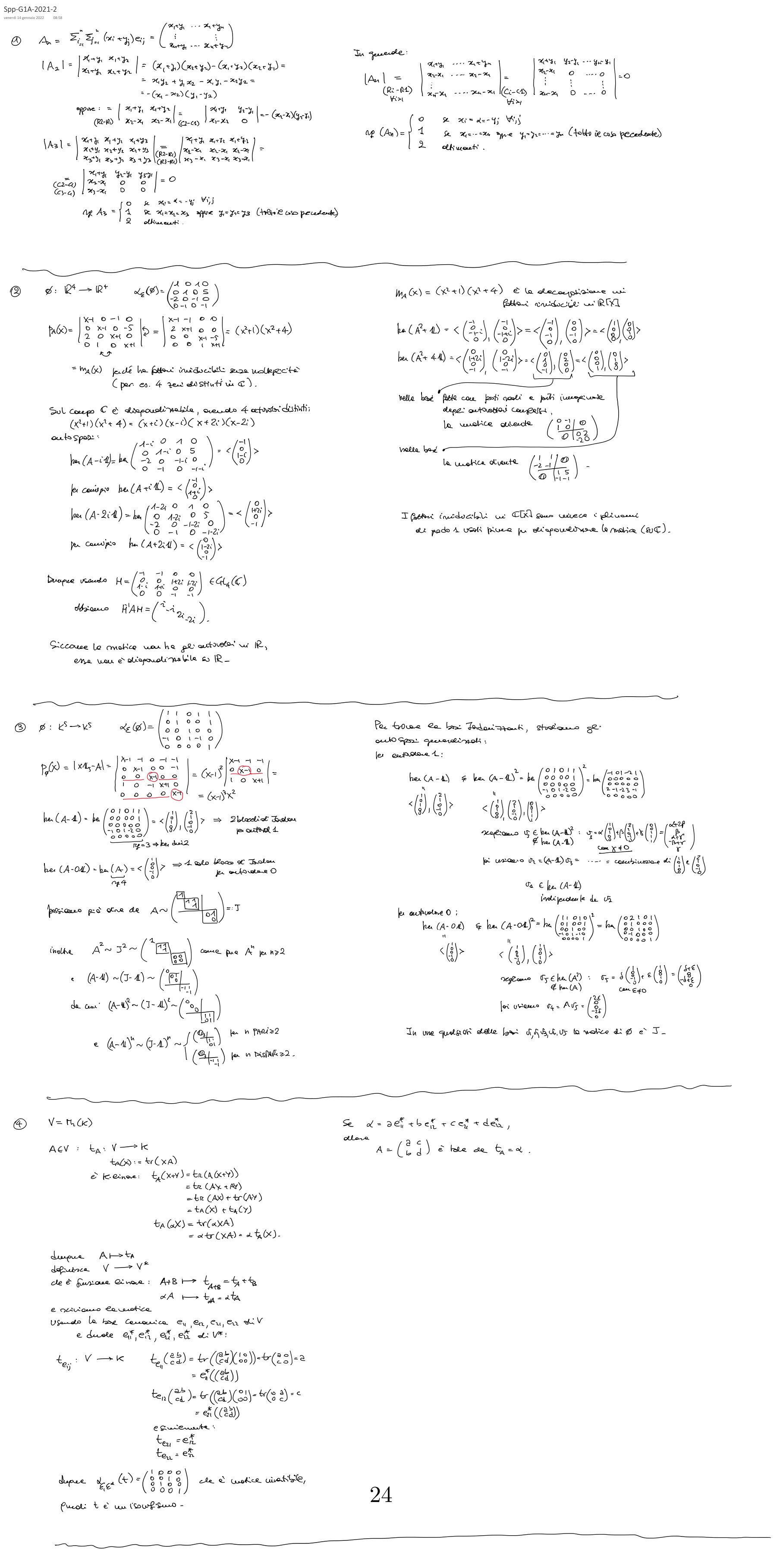
(3) per ciascun divisore irriducibile $q_i(X)$ di $m_A(X)$ in $\mathbb{R}[X]$, descrivere l'endomorfismo $q_i(\phi)$ e determinare una base $\mathcal{B}_i$ del suo nucleo. Scrivere la matrice di ϕ rispetto alla base ottenuta unendo le basi $\mathcal{B}_i$. Come cambia la risposta lavorando in $\mathbb{C}[X]$?

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare la forma di Jordan di ϕ, delle sue potenze e delle potenze di $\phi - \mathrm{id}$. Trovare tutte le basi di K^5 jordanizzanti per ϕ.

Esercizio 4. Sia $V = M_2(K)$ (matrici quadrate di ordine 2). Per ogni $A \in V$ definiamo la funzione $t_A : V \to K$ tramite $t_A(X) := \mathrm{tr}(XA)$ (traccia della matrice prodotto XA, cioè la somma degli elementi diagonali). Mostrare che t_A è lineare. Mostrare che la mappa $V \to V^*$ (definita mandando A in t_A) è un isomorfismo, scrivendone la matrice nelle basi canonica e duale di V e V^* rispettivamente. Per ogni elemento $\alpha \in V^*$ trovare $A \in V$ tale che $\alpha = t_A$.



Spp-G1A-2021-2

venerdì 14 gennaio 2022 08:58

① $A_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i+y_j)e_{ij} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 & \cdots & x_1+y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n+y_1 & \cdots & x_n+y_n \end{pmatrix}$

$|A_2| = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 \\ x_2+y_1 & x_2+y_2 \end{vmatrix} = (x_1+y_1)(x_2+y_2)-(x_1+y_2)(x_2+y_1) =$
$= x_1y_2 + y_1x_2 - x_1y_1 - x_2y_2 =$
$= -(x_1-x_2)(y_1-y_2)$

oppure: $\underset{(R2-R1)}{=} \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 \\ x_2-x_1 & x_2-x_1 \end{vmatrix} \underset{(C2-C1)}{=} \begin{vmatrix} x_1+y_1 & y_2-y_1 \\ x_2-x_1 & 0 \end{vmatrix} = -(x_2-x_1)(y_2-y_1)$

$|A_3| = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3 \\ x_2+y_1 & x_2+y_2 & x_2+y_3 \\ x_3+y_1 & x_3+y_2 & x_3+y_3 \end{vmatrix} \underset{\substack{(R2-R1)\\(R3-R1)}}{=} \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3 \\ x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 \\ x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix} =$

$\underset{\substack{(C2-C1)\\(C3-C1)}}{=} \begin{vmatrix} x_1+y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ x_2-x_1 & 0 & 0 \\ x_3-x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$rg\, A_3 = \begin{cases} 0 & \text{se } x_i = \alpha = -y_j \ \forall i,j \\ 1 & \text{se } x_1=x_2=x_3 \text{ oppure } y_1=y_2=y_3 \text{ (tolto il caso precedente)} \\ 2 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

In generale:

$|A_n| \underset{\substack{(Ri-R1)\\ \forall i>1}}{=} \begin{vmatrix} x_1+y_1 & \cdots & x_1+y_n \\ x_2-x_1 & \cdots & x_2-x_1 \\ \vdots & & \\ x_n-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \end{vmatrix} \underset{\substack{(Ci-C1)\\ \forall i>1}}{=} \begin{vmatrix} x_1+y_1 & y_2-y_1 & \cdots & y_n-y_1 \\ x_2-x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n-x_1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$

$rg\,(A_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_i = \alpha = -y_j \ \forall i,j \\ 1 & \text{se } x_1=\cdots=x_n \text{ oppure } y_1=y_2=\cdots=y_n \text{ (tolto il caso precedente)} \\ 2 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

② $\phi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \qquad \alpha_E(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$p_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & x+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = (x^2+1)(x^2+4)$

$= m_A(x)$ perché ha fattori irriducibili senza molteplicità (per es. 4 zeri distinti in $\mathbb{C}$).

Sul campo $\mathbb{C}$ è diagonalizzabile, avendo 4 autovalori distinti:
$(x^2+1)(x^2+4) = (x+i)(x-i)(x+2i)(x-2i)$
autospazi:

$\ker(A-i\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} 1-i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & 5 \\ -2 & 0 & -1-i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1-i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

per coniugio $\ker(A+i\mathbb{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\ker(A-2i\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} 1-2i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2i & 0 & 5 \\ -2 & 0 & -1-2i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1-2i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1+2i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

per coniugio $\ker(A+2i\mathbb{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1-2i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Dunque usando $H = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2i & 1-2i \\ 1-i & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{C})$

otteniamo $H^{-1}AH = \begin{pmatrix} i & & & \\ & -i & & \\ & & 2i & \\ & & & -2i \end{pmatrix}$.

Siccome la matrice non ha gli autovalori in $\mathbb{R}$, essa non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$m_A(x) = (x^2+1)(x^2+4)$ è la decomposizione in fattori irriducibili in $\mathbb{R}[X]$

$\ker(A^2+\mathbb{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1-i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1+i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\ker(A^2+4\mathbb{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1+2i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1-2i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$

nella base fatta con parti reali e parti immaginarie degli autovettori complessi, la matrice diventa $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 2 \\ & & -2 & 0 \end{array}\right)$

nella base la matrice diventa $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ -2 & -1 & & \\ \hline & & 1 & 5 \\ & & -1 & -1 \end{array}\right)$.

I fattori irriducibili in $\mathbb{C}[X]$ sono invece i polinomi di grado 1 usati prima per diagonalizzare la matrice (su $\mathbb{C}$).

③ $\phi: K^5 \longrightarrow K^5 \qquad \alpha_E(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$p_\phi(x) = |x\mathbb{1}_5 - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{x-1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{x-1} \end{vmatrix} = (x-1)^2 \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{x-1} & 0 \\ 1 & 0 & x+1 \end{vmatrix} =$
$= (x-1)^3 x^2$

$\ker(A-\mathbb{1}) = \ker\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{rg=3 \Rightarrow \ker \dim 2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow$ 2 blocchi di Jordan per autoval 1

$\ker(A-0\mathbb{1}) = \ker\underbrace{(A)}_{rg 4} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow$ 1 solo blocco di Jordan per autovalore 0

possiamo più dire che $A \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} \boxed{1} & & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ \hline & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{array}\right) =: J$

inoltre $A^2 \sim J^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$ come pure A^n per $n \geq 2$

e $(A-\mathbb{1}) \sim (J-\mathbb{1}) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ \hline & & & -1 & 1 \\ & & & & -1 \end{array}\right)$

da cui $(A-\mathbb{1})^2 \sim (J-\mathbb{1})^2 \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ \hline & & & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 \end{array}\right)$

e $(A-\mathbb{1})^n \sim (J-\mathbb{1})^n \sim \begin{cases} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbb{0}_3 & & \\ \hline & 1 & 1 \\ & 0 & 1 \end{array}\right) & \text{per } n \text{ PARI} \geq 2 \\ \left(\begin{array}{c|cc} \mathbb{0}_3 & & \\ \hline & -1 & 1 \\ & & -1 \end{array}\right) & \text{per } n \text{ DISPARI} \geq 2. \end{cases}$

Per trovare le basi Jordanizzanti, studiamo gli autospazi generalizzati:
per autovalore 1:

$\ker(A-\mathbb{1}) \subsetneq \ker(A-\mathbb{1})^2 = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \ker\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\ker(A-\mathbb{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A-\mathbb{1})^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

scegliamo $v_3 \in \ker(A-\mathbb{1})^2$, $\notin \ker(A-\mathbb{1})$: $v_3 = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+2\beta \\ \beta \\ \alpha+\gamma \\ -\beta+\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$ con $\gamma \neq 0$

poi usiamo $v_2 = (A-\mathbb{1})v_3 = \cdots =$ combinazione di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_1 \in \ker(A-\mathbb{1})$ indipendente da v_2

per autovalore 0:

$\ker(A-0\mathbb{1}) \subsetneq \ker(A-0\mathbb{1})^2 = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \ker\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\ker(A-0\mathbb{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A-0\mathbb{1})^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

scegliamo $v_5 \in \ker(A^2)$, $\notin \ker(A)$: $v_5 = \delta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta+\varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ -\delta+\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$ con $\varepsilon \neq 0$

poi usiamo $v_4 = Av_5 = \begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ -2\delta \\ 0 \end{pmatrix}$

In una qualsiasi delle basi v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 la matrice di ϕ è J.

④ $V = M_2(K)$

$A \in V$: $t_A : V \longrightarrow K$
$t_A(X) := tr(XA)$
è K-lineare: $t_A(X+Y) = tr(A(X+Y))$
$= tr(AX+AY)$
$= tr(AX) + tr(AY)$
$= t_A(X) + t_A(Y)$
$t_A(\alpha X) = tr(\alpha XA)$
$= \alpha\, tr(XA) = \alpha\, t_A(X)$.

dunque $A \longmapsto t_A$
definisce $V \longrightarrow V^*$
che è funzione lineare: $A+B \longmapsto t_{A+B} = t_A + t_B$
$\alpha A \longmapsto t_{\alpha A} = \alpha t_A$
e scriviamo la matrice
usando la base canonica $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$ di V
e duale $e_{11}^*, e_{12}^*, e_{21}^*, e_{22}^*$ di V^*:

$t_{e_{ij}} : V \longrightarrow K \qquad t_{e_{11}}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = a$
$= e_{11}^*\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

$t_{e_{12}}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = c$
$= e_{21}^*\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

e similmente:
$t_{e_{21}} = e_{12}^*$
$t_{e_{22}} = e_{22}^*$

dunque $\alpha_{E,E^*}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ che è matrice invertibile,

quindi t è un isomorfismo.

Se $\alpha = a e_{11}^* + b e_{12}^* + c e_{21}^* + d e_{22}^*$,
allora
$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ è tale che $t_A = \alpha$.

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e cartesiana le radici quarte del numero complesso $e^{i2\pi/3}$. Determinare le equazioni hermitiane delle sei rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 2. Sia $V = M_3(K)$ lo spazio delle matrici d'ordine 3 e coefficienti in K. Consideriamo i sottinsiemi V_d delle matrici tali che tutti gli elementi della diagonale principale sono nulli e V_a delle matrici tali che tutti gli elementi della antidiagonale principale sono nulli. Mostrare che sono sottospazi. Determinare dimensioni e basi per V_d, V_a, $V_d \cap V_a$, $V_d + V_a$. Qual è il massimo rango possibile per matrici in questi sottospazi? Esiste un sottospazio complementare comune a V_d e V_a?

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare i polinomi caratteristico e minimo di A. Determinare la forma di Jordan di A e una base jordanizzante per ogni potenza ϕ^n con $n > 0$. Esistono sottospazi W di K^5 tali che ϕ ristretta a W sia diagonalizzabile? Se sì determinarne uno di dimensione massima.

Esercizio 4. Sia $P = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Si consideri l'applicazione $\phi: P \to P$ definita da $p(X) \mapsto p(X-2)$.

(1) Mostrare la linearità di ϕ e determinarne la matrice rispetto alla base canonica di P.

(2) Si mostri che l'insieme $\mathcal{B}$ formato dalle potenze (da 0 a 3) di $X-2$ formano una base di P e si scriva la matrice di ϕ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(3) Si mostri che ϕ^* è un isomorfismo e si determini la matrice dell'inversa rispetto alla base duale $\mathcal{B}^*$.

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici (eventualmente complesse) del polinomio Z^4+3Z^2-4. Determinare le equazioni hermitiane delle sei rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno, e in particolare indicare l'immagine tramite l'inversione dei punti interni del rombo i cui vertici sono le radici trovate.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Consideriamo i sottospazi V_1 formato dai polinomi che si annullano in 1, e V_{-1} formato dai polinomi che si annullano in -1. Determinare dimensioni e basi per V_1, V_{-1}, $V_1 \cap V_{-1}$, $V_1 + V_{-1}$. Per ogni polinomio in V trovare, se possibile, tutti i modi di scriverlo come somma di un polinomio in V_1 e un polinomio in V_{-1}.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{Q}^5$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare i polinomi caratteristico e minimo di A, gli autospazi di ϕ, la forma di Jordan di A e una base jordanizzante. Decomporre $\phi = \phi_D + \phi_N$ con ϕ_D endomorfismo diagonalizzabile e ϕ_N nilpotente. Scrivere la matrice di ϕ_N rispetto alla base canonica.

Esercizio 4. Sia $V = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 2 a coefficienti in $\mathbb{C}$. Data $A \in V$, si consideri la mappa $s_A : V \to V$ data dalla moltiplicazione a sinistra per A, cioè $s_A(X) = AX$. Mostrare che s_A è lineare, scrivere la matrice di s_A in base canonica e calcolare il suo determinante (in funzione del determinante di A). Determinare polinomi caratteristico e minimo di s_A in funzione di quelli di A. Determinare la forma di Jordan di s_A in funzione della forma di Jordan di A. Generalizzare al caso di matrici di ordine n.

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici (eventualmente complesse) del polinomio $Z^3 - 2Z^2 + Z - 2$. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno, e in particolare indicare l'immagine tramite l'inversione dei punti interni del triangolo i cui vertici sono le radici trovate.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 4. Consideriamo i sottospazi $V_{\geq 2}$ formato dai polinomi che si annullano in 1 con molteplicità almeno 2, e $V_{\leq 2}$ formato dai polinomi che hanno grado minore o uguale a 2. Determinare dimensioni e basi per $V_{\geq 2}$, $V_{\leq 2}$, loro intersezione e somma. Per ogni polinomio in V trovare, se possibile, tutti i modi di scriverlo come somma di un polinomio in $V_{\geq 2}$ e un polinomio in $V_{\leq 2}$.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{Q}^5$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare i polinomi caratteristico e minimo di ϕ, gli autospazi di ϕ, la forma di Jordan di A e una base jordanizzante. Determinare tutte le basi jordanizzanti per A.

Esercizio 4. Sia $V = \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici con 3 righe e 2 colonne a coefficienti in $\mathbb{C}$. Sia $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ una matrice quadrata d'ordine 3. Si consideri la mappa $s_A : V \to V$ data dalla moltiplicazione a sinistra per A, cioè $s_A(X) = AX$. Mostrare che s_A è lineare, scrivere la matrice di s_A in base canonica e calcolare il suo determinante (in funzione del determinante di A). Determinare polinomi caratteristico e minimo di s_A in funzione di quelli di A. Determinare la forma di Jordan di s_A in funzione della forma di Jordan di A.

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici cubiche (eventualmente complesse) del numero -3. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno, e in particolare indicare l'immagine tramite l'inversione dei punti esterni al triangolo i cui vertici sono le radici trovate.

Esercizio 2. Sia $V = \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 3 a coefficienti in $\mathbb{C}$. Sia U_p il sottinsieme formato dalle matrici tali che la somma sulla diagonale principale e la somma sulla prima colonna siano nulle, e sia U_a il sottinsieme formato dalle matrici tali che la somma sulla antidiagonale principale e la somma sulla prima riga siano nulle. Determinare basi e dimensioni per U_p, U_a, $U_p \cap U_a$, $U_p + U_a$. Determinare se possibile tutti i modi in cui una generica matrice in V si può scrivere come somma di una matrice in U_p e una in U_a.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{Q}^5$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare i polinomi caratteristico e minimo di ϕ, gli autospazi di ϕ, la forma di Jordan di A e una base jordanizzante. Determinare tutte le basi jordanizzanti per A.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 5}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 5, dotato del prodotto dell'anello quoziente $\mathbb{R}[X]/(X^6)$ (cioè con $X^6 = X^7 = \cdots = 0$). Sia $q(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 + a_5X^5 \in V$ e sia $\mu_q : V \to V$ la moltiplicazione per q, cioè $\mu_q(p(X)) = p(X)q(X)$. Determinare la matrice di μ_q nella base canonica di V, polinomi caratteristico e minimo di μ_q, la forma di Jordan di μ_q in funzione dei coefficienti del polinomio $q(X)$.

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici (eventualmente complesse) del polinomio $X^3 - 4X^2 + 6X - 4$. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno, e in particolare indicare l'immagine tramite l'inversione dei punti esterni al triangolo i cui vertici sono le radici trovate.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 5}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 5. Consideriamo i sottospazi V_1 formato dai polinomi $P(X)$ tali che $P(X) = X^5 P(1/X)$, e V_{-1} formato dai polinomi $P(X)$ tali che $P(X) = -X^5 P(1/X)$. Determinare dimensioni e basi per V_1, V_{-1}, $V_1 \cap V_{-1}$, $V_1 + V_{-1}$. Per ogni polinomio in V trovare, se possibile, tutti i modi di scriverlo come somma di un polinomio in V_1 e un polinomio in V_{-1}.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{Q}^5$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare i polinomi caratteristico e minimo di ϕ, gli autospazi di ϕ, la forma di Jordan di A e una base jordanizzante. Determinare tutte le basi jordanizzanti per A.

Esercizio 4. Sia $V = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 2 a coefficienti in $\mathbb{C}$. Si consideri la mappa $s : V \to V$ data da $s(X) = X + X^{\mathrm{t}}$. Mostrare che s è lineare, determinare nucleo e immagine, scrivere la matrice di s in base canonica e calcolare il suo determinante. Determinare polinomi caratteristico e minimo di s. Determinare la forma di Jordan di s. Generalizzare al caso di matrici di ordine n.

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici quarte (eventualmente complesse) del numero -16. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno, e in particolare indicare l'immagine tramite l'inversione dei punti interni al quadrato i cui vertici sono le radici trovate.

Esercizio 2. Sia $V = \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 3 a coefficienti in $\mathbb{C}$. Sia U_p il sottinsieme formato dalle matrici tali che le somme su ogni riga sia siano uguali tra loro, e sia U_a il sottinsieme formato dalle matrici tali che le somme su ogni colonna sia siano uguali tra loro. Determinare basi e dimensioni per U_p, U_a, $U_p \cap U_a$, $U_p + U_a$. Determinare se possibile tutti i modi in cui una generica matrice in V si può scrivere come somma di una matrice in U_p e una in U_a.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{Q}^5$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare i polinomi caratteristico e minimo di ϕ, gli autospazi di ϕ, la forma di Jordan di A e una base jordanizzante. Determinare tutte le basi jordanizzanti per A.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 5}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 5 dotato del prodotto dell'anello quoziente $\mathbb{R}[X]/(X^6)$ (cioè con $X^6 = X^7 = \cdots = 0$). Consideriamo la funzione $q : V \to V$ data da $q(P(X)) = P(X^2)$. Mostrare che q è lineare, determinare la matrice di q nella base canonica di V, polinomi caratteristico e minimo di q, la forma di Jordan di q. Generalizzare ai polinomi di grado minore o uguale a n.

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ dotato del riferimento canonico, consideriamo i sottospazi

$$\mathbb{L} = \begin{cases} X_1 - X_3 = 1 \\ X_2 - X_4 = 1 \end{cases} \quad , \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Determinare le posizioni reciproche di $\mathbb{L}$ ed r. Per ogni punto P dello spazio determinare, se esistono, tutte le rette t_P per P tali che $\mathbb{L} \vee t_P$ abbia dimensione 3 e $r \vee t_P$ sia un piano. In quali casi vi è una unica retta? Ve ne sono che siano parallele a $\mathbb{L}$ o ad r?

Determinare da quanti parametri dipendono le affinità F di $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ tali che $F(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$ e $F(r) \subseteq r$.

Esercizio 2. Siano A, B, C i vertici di un triangolo in uno spazio affine (tre punti non allineati), e si indichino con a, b, c i tre lati ($a = B \vee C$, ecc.). Dati tre punti A', B', C' rispettivamente sui tre lati ($A' \in a$, ecc.) e diversi dai vertici, mostrare che esistono altri tre punti A'', B'', C'' sugli stessi lati ($A'' \in a$, ecc.) tali che $(A\ B\ C'')(A\ B\ C') = -1$, ecc. (esplicitare come trovare A'' dati B, C, A'. ecc.).

Mostrare che $A \vee A'$, $B \vee B'$, $C \vee C'$ concorrono in un punto se e solo se A'', B'', C'' sono allineati. Che enunciato si può fare con punti A''', B''', C''' ($A''' \in a$, ecc.) tali che $(A\ B\ C''')(A\ B\ C') = 1$, ecc.?

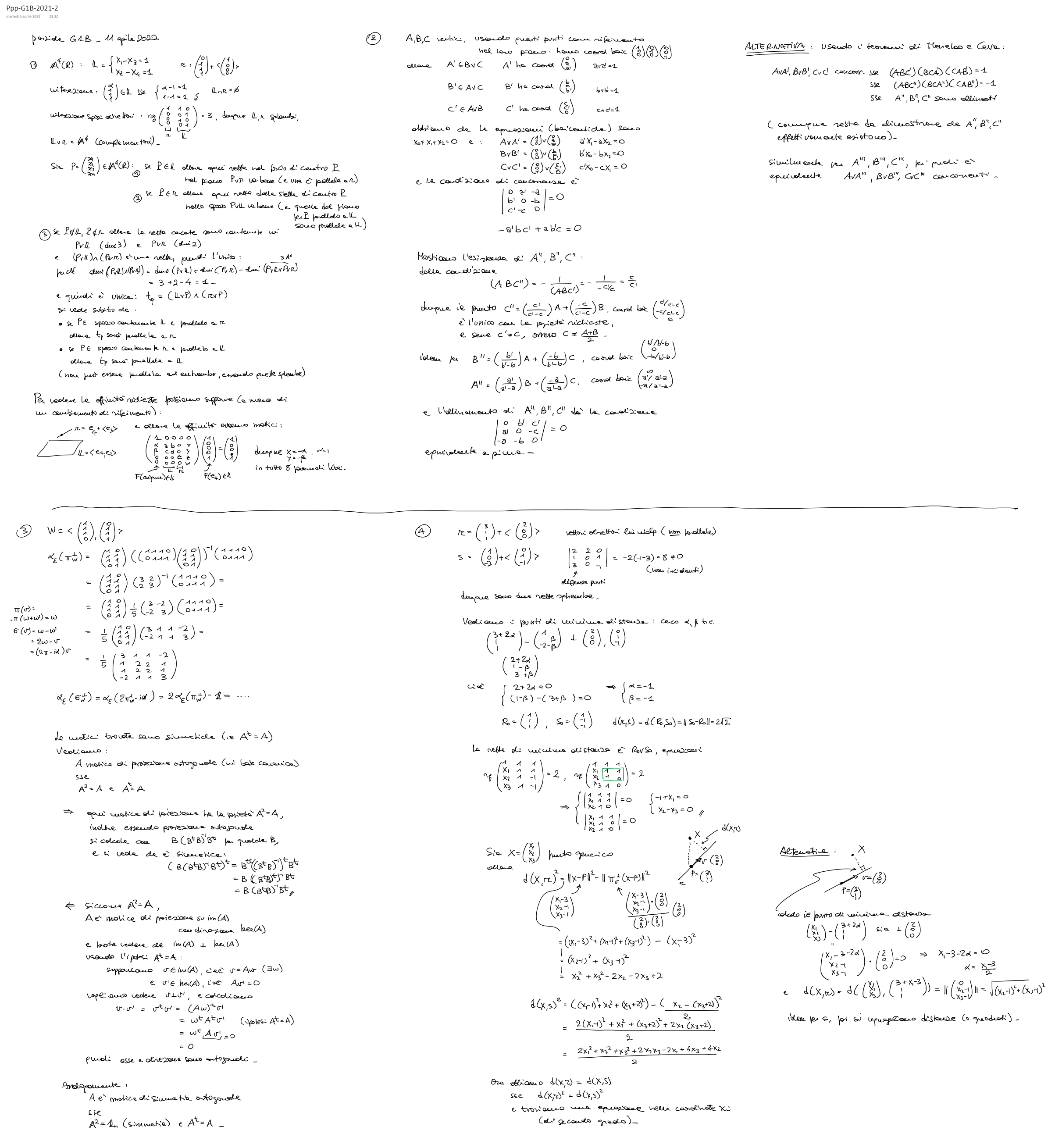
[sugg.: usare coordinate baricentriche]

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $V_4(\mathbb{R})$, è dato il piano W generato dai vettori $e_1 + e_2 + e_3$, $e_2 + e_3 + e_4$. Determinare le matrici nella base canonica della proiezione ortogonale e della simmetria ortogonale di asse W.

Mostrare in generale che una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è matrice nella base canonica di una proiezione ortogonale in $V_n(\mathbb{R})$ se e solo se valgono le seguenti due condizioni: $A^2 = A$ e $A^{\mathrm{t}} = A$. Enunciare e dimostrare una caratterizzazione simile per le simmetrie ortogonali.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ sono date le due rette $r : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ e $s : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. Determinare posizione reciproca, distanza, punti di minima distanza, equazioni cartesiane della retta di minima distanza.

Caratterizzare tramite una equazione cartesiana l'insieme dei punti equidistanti dalle due rette date.



Ppp-G1B-2021-2

martedì 5 aprile 2022 13:32

parziale G1B _ 11 aprile 2022

① $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$: $\mathbb{L} = \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_4 = 1 \end{cases}$ $r : \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \rangle$

intersezione: $\begin{pmatrix}\alpha\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{L}$ sse $\begin{cases}\alpha - 1 = 1\\ 1-1 = 1 \end{cases}$ ↯ $\mathbb{L} \cap r = \emptyset$

intersezione spazi direttori: $rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$, dunque $\mathbb{L}, r$ sghembi;

$\mathbb{L} \vee r = \mathbb{A}^4$ (complementari) _

Sia $P = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$: ① se $P \in \mathbb{L}$ allora ogni retta nel fascio di centro P nel piano $P \vee r$ va bene (e una è parallela a r)

② se $P \in r$ allora ogni retta della stella di centro P nello spazio $P \vee \mathbb{L}$ va bene (e quelle del piano per P parallelo a $\mathbb{L}$ sono parallele a $\mathbb{L}$)

③ se $P \notin \mathbb{L}$, $P \notin r$ allora le rette cercate sono contenute in $P \vee \mathbb{L}$ (dim 3) e $P \vee r$ (dim 2)

e $(P \vee \mathbb{L}) \wedge (P \vee r)$ è una retta, quindi l'unica:

perché $\dim\left((P\vee\mathbb{L}) \wedge (P \vee r)\right) = \dim(P \vee \mathbb{L}) + \dim(P \vee r) - \dim(\overbrace{P \vee \mathbb{L} \vee P \vee r}^{\supseteq \mathbb{A}^4})$

$= 3 + 2 - 4 = 1$ _

e quindi è unica: $t_P = (\mathbb{L} \vee P) \wedge (r \vee P)$

si vede subito che:

- se $P \in$ spazio contenente $\mathbb{L}$ e parallelo a r allora t_P sarà parallela a r
- se $P \in$ spazio contenente r e parallelo a $\mathbb{L}$ allora t_P sarà parallela a $\mathbb{L}$

(non può essere parallela ad entrambe, essendo quelle sghembe)

Per vedere le affinità richieste possiamo supporre (a meno di un cambiamento di riferimento):

$r = e_4 + \langle e_3 \rangle$

$\mathbb{L} = \langle e_1, e_2 \rangle$

e allora le affinità avranno matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & a & b & 0 & x \\ \beta & c & d & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & e & z \\ 0 & \underbrace{0 \; 0}_{\mathbb{L}} & & \underbrace{0}_{r} & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\bullet\\1\end{pmatrix}$$

$F(\text{origine}) \in \mathbb{L}$ $F(e_4) \in r$

dunque $x = -\alpha$, $y = -\beta$, $w = 1$

in tutto 8 parametri liberi.

② A, B, C vertici, usando questi punti come riferimento nel loro piano: hanno coord baric $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

allora $A' \in B \vee C$ A' ha coord $\begin{pmatrix}0\\a\\a'\end{pmatrix}$ $a + a' = 1$

$B' \in A \vee C$ B' ha coord $\begin{pmatrix}b\\0\\b'\end{pmatrix}$ $b + b' = 1$

$C' \in A \vee B$ C' ha coord $\begin{pmatrix}c\\c'\\0\end{pmatrix}$ $c + c' = 1$

otteniamo che le equazioni (baricentriche) sono

$x_0 + x_1 + x_2 = 0$ e : $A \vee A' = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\a\\a'\end{pmatrix}$ $a'x_1 - ax_2 = 0$

$B \vee B' = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}b\\0\\b'\end{pmatrix}$ $b'x_0 - bx_2 = 0$

$C \vee C' = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}c\\c'\\0\end{pmatrix}$ $c'x_0 - cx_1 = 0$

e la condizione di concorrenza è

$$\begin{vmatrix} 0 & a' & -a \\ b' & 0 & -b \\ c' & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-a'bc' + ab'c = 0$$

Mostriamo l'esistenza di A'', B'', C'':

dalla condizione

$$(ABC'') = -\frac{1}{(ABC')} = -\frac{1}{-c'/c} = \frac{c}{c'}$$

dunque il punto $C'' = \left(\frac{c'}{c'-c}\right)A + \left(\frac{-c}{c'-c}\right)B$, coord bar $\begin{pmatrix} c'/c'-c \\ -c/c'-c \\ 0 \end{pmatrix}$

è l'unico con le proprietà richieste,

e sse $c' \neq c$, ovvero $C \neq \frac{A+B}{2}$ _

idem per $B'' = \left(\frac{b'}{b'-b}\right)A + \left(\frac{-b}{b'-b}\right)C$, coord baric $\begin{pmatrix} b'/b'-b \\ 0 \\ -b/b'-b \end{pmatrix}$

$A'' = \left(\frac{a'}{a'-a}\right)B + \left(\frac{-a}{a'-a}\right)C$. coord baric $\begin{pmatrix} 0 \\ a'/a'-a \\ -a/a'-a \end{pmatrix}$

e l'allineamento di A'', B'', C'' dà la condizione

$$\begin{vmatrix} 0 & b' & c' \\ a' & 0 & -c \\ -a & -b & 0 \end{vmatrix} = 0$$

equivalente a prima _

ALTERNATIVA : usando i teoremi di Menelao e Ceva:

$A \vee A', B \vee B', C \vee C'$ concorr. sse $(ABC')(BCA')(CAB') = 1$

sse $(ABC'')(BCA'')(CAB'') = -1$

sse A'', B'', C'' sono allineati

(comunque resta da dimostrare che A'', B'', C'' effettivamente esistono) _

Similmente per A''', B''', C''', per i quali è equivalente $A \vee A''', B \vee B''', C \vee C'''$ concorrenti _

③ $W = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$

$$\alpha_{\mathcal{E}}(\pi_W^{\perp}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\pi(v) =$
$= \pi(w + w') = w$
$\sigma(v) = w - w'$
$= 2w - v$
$= (2\pi - id)v$

$$\alpha_{\mathcal{E}}(\sigma_W^{\perp}) = \alpha_{\mathcal{E}}(2\pi_W^{\perp} - id) = 2\alpha_{\mathcal{E}}(\pi_W^{\perp}) - \mathbb{1} = \dots$$

Le matrici trovate sono simmetriche (ie $A^t = A$)

Vediamo:

A matrice di proiezione ortogonale (in base canonica)

sse

$A^2 = A$ e $A^t = A$

$\Rightarrow$ ogni matrice di proiezione ha la proprietà $A^2 = A$,

inoltre essendo proiezione ortogonale

si calcola come $B(B^tB)^{-1}B^t$ per qualche B,

e si vede che è simmetrica:

$$(B(B^tB)^{-1}B^t)^t = B^{tt}((B^tB)^{-1})^t B^t$$
$$= B((B^tB)^t)^{-1}B^t$$
$$= B(B^tB)^{-1}B^t \,/\!/$$

$\Leftarrow$ siccome $A^2 = A$,

A è matrice di proiezione su $im(A)$

con direzione $ker(A)$

e basta vedere che $im(A) \perp ker(A)$

usando l'ipotesi $A^t = A$:

supponiamo $v \in im(A)$, cioè $v = Aw$ $(\exists w)$

e $v' \in ker(A)$, cioè $Av' = 0$

vogliamo vedere $v \perp v'$, e calcoliamo

$$v \cdot v' = v^t v' = (Aw)^t v'$$
$$= w^t A^t v' \quad (\text{ipotesi } A^t = A)$$
$$= w^t \underbrace{A v'}_{=0}$$
$$= 0$$

quindi asse e direzione sono ortogonali _

Analogamente:

A è matrice di simmetria ortogonale

sse

$A^2 = \mathbb{1}_n$ (simmetria) e $A^t = A$ _

④ $r = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \rangle$ vettori direttori lin indip (non parallele)

$s = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \rangle$ $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2(-1-3) = 8 \neq 0$

differenza punti

(non incidenti)

dunque sono due rette sghembe.

Vediamo i punti di minima distanza: cerco α, β t.c.

$$\begin{pmatrix}3+2\alpha\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\\beta\\-2-\beta\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2+2\alpha\\1-\beta\\3+\beta\end{pmatrix}$$

cioè $\begin{cases} 2 + 2\alpha = 0 \\ (1-\beta) - (3+\beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \end{cases}$

$R_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $S_0 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $d(r,s) = d(R_0, S_0) = \|S_0 - R_0\| = 2\sqrt{2}$

La retta di minima distanza è $R_0 \vee S_0$, equazioni

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & -1 \\ x_3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2, \quad rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & \boxed{\begin{matrix}1 & 1 \\ 1 & 0\end{matrix}} \\ x_2 & & \\ x_3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 + x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} /\!/$$

Sia $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ punto generico

allora

$$d(X, r)^2 = \|X - P\|^2 - \|\pi_v^{\perp}(X-P)\|^2$$

$\begin{pmatrix}x_1-3\\x_2-1\\x_3-1\end{pmatrix}$ $\quad \dfrac{\begin{pmatrix}x_1-3\\x_2-1\\x_3-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

$d(X,r)$ X $v\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ r

$$= ((x_1-3)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3-1)^2) - (x_1-3)^2$$
$$= (x_2-1)^2 + (x_3-1)^2$$
$$= x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 - 2x_3 + 2$$

$$d(X,s)^2 = ((x_1-1)^2 + x_2^2 + (x_3+2)^2) - \left(\frac{x_2 - (x_3+2)}{2}\right)^2$$
$$= \frac{2(x_1-1)^2 + x_2^2 + (x_3+2)^2 + 2x_2(x_3+2)}{2}$$
$$= \frac{2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 - 2x_1 + 4x_3 + 4x_2}{2}$$

Ora otteniamo $d(X,r) = d(X,s)$

sse $d(X,r)^2 = d(X,s)^2$

e troviamo una equazione nelle coordinate x_i (di secondo grado) _

Alternativa: X $v = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$

calcolo il punto di minima distanza

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3+2\alpha\\1\\1\end{pmatrix} \text{ sia } \perp \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1 - 3 - 2\alpha\\x_2-1\\x_3-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 - 3 - 2\alpha = 0$$
$$\alpha = \frac{x_1-3}{2}$$

e $d(X,r) = d\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3+x_1-3\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix}0\\x_2-1\\x_3-1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(x_2-1)^2 + (x_3-1)^2}$

idem per s, poi si uguagliano distanze (o quadrati) _

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, siano σ una simmetria ortogonale rispetto a un piano π e ρ una rotazione rispetto ad una retta r. Determinare che tipo di rigidità, secondo la classificazione di Eulero, risulta la composizione $\sigma \circ \rho$. In quali casi si ha $\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$? *[sugg.: distinguere a seconda delle posizioni reciproche di π ed r.]*

Esercizio 2. Sono dati due piani sghembi π_1, π_2 in uno spazio proiettivo di dimensione 5. Mostrare che per ogni punto P non appartenente ai due piani esiste una unica retta r_P passante per P e incidente π_1, π_2. Determinare la posizione reciproca delle rette r_P ed r_Q a seconda dei punti P, Q (non appartenenti ai due piani), distinguendo a seconda della posizione reciproca della retta $P \vee Q$ con i due piani.

Dualizzare tutti gli enunciati trovati.

Esercizio 3. Dato un triangolo di vertici A, B, C (lati a, b, c) in un piano proiettivo, e dati $A', A'' \in a$, $B', B'' \in b$, $C', C'' \in c$ (generici, cioè distinti tra di loro e dai vertici), mostrare che: esiste una proiettività del piano cha manda ordinatamente A, B, C, A', B', C' in A, B, C, A'', B'', C'' se solo se risulta $(A\ B\ C'\ C'')(B\ C\ A'\ A'')(C\ A\ B'\ B'') = 1$.

Dedurre dalla proprietà precedente che: se A'', B'', C'' sono allineati, allora A', B', C' sono allineati se e solo se $(A\ B\ C'\ C'')(B\ C\ A'\ A'')(C\ A\ B'\ B'') = 1$. Dedurre da questo il teorema di Menelao affine.

Dualizzare gli enunciati precedenti.

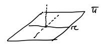
Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha esattamente 3 punti uniti. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, sia P un punto unito e Q un punto non unito; determinare il birapporto $(P\ Q\ \phi Q\ \phi^n Q)$.

Spp-G1B-2021-2
venerdì 10 giugno 2022 07:54

①
σ simmetria ortogonale rispetto a piano π
ρ rotazione con asse una retta r
in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$: classificare $\sigma\circ\rho$
dire quando $\sigma\circ\rho = \rho\circ\sigma$.
In ogni caso è isometria INVERSA (rifl. o rotorifl. o glissorifl.)

se $r \subseteq \pi$:

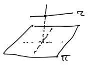


$$\sigma: \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \quad \rho: \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&-s\\0&0&s&c\end{pmatrix}$$

$$\sigma\circ\rho: \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&-s\\0&0&-s&-c\end{pmatrix}$$ riflessione

$$\rho\circ\sigma: \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&s\\0&0&s&-c\end{pmatrix}$$ è diversa, tranne per $s=0$ (rotazione $0,\pi$).

se $r // \pi$:

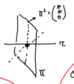


$$\sigma: \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \quad \rho: \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&-s\\z&0&s&c\end{pmatrix}$$

$$\sigma\circ\rho: \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&-s\\-z&0&-s&-c\end{pmatrix}$$ riflessione (non glisso)

$$\rho\circ\sigma: \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&s\\z&0&s&-c\end{pmatrix}$$ è diversa...

se $r\cap\pi = P$:



$$\sigma: \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\alpha&\beta&0\\0&\beta&\gamma&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \quad \rho: \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&-s\\0&0&s&c\end{pmatrix}$$

$$\sigma\circ\rho: \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\alpha&c\beta&-s\beta\\0&\beta&c\gamma&-s\gamma\\0&0&s&c\end{pmatrix}$$ rotoriflessione (ha un solo pto fisso tranne casi banali)

$$\rho\circ\sigma: \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\alpha&\beta&0\\0&c\beta&c\gamma&-s\\0&s\beta&s\gamma&c\end{pmatrix}$$ uguali se $\begin{matrix}c=1\\s=0\end{matrix}$ ($\rho = id$)
oppure $\begin{matrix}\beta=0\\\gamma=1\end{matrix}$ ($r \perp \pi$)

$\sigma\circ\rho(P) = P = \begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$
$\rho(P) = \sigma(P)$

$$\begin{pmatrix}1\\\alpha x+\beta y\\\beta x+\gamma y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\x\\cy-sz\\sy+cz\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha-1&\beta&0\\\beta&\gamma-c&s\\0&s&c-1\end{pmatrix} \Leftarrow rg\begin{pmatrix}\alpha-1&\beta&0\\\beta&\gamma-1&0\\0&0&0\end{pmatrix} = 1$$ (piano di punti)

rango di questa matrice è 3, a meno che $\begin{matrix}c=1\\s=0\end{matrix}$ (rotazione nulla!).

②
π_1, π_2 piani sghembi in $\mathbb{P}^5(\mathbb{K})$
$P \in \mathbb{P}^5(\mathbb{K}) \setminus (\pi_1 \cup \pi_2)$
allora
$r_P := (P\vee\pi_1)\wedge(P\vee\pi_2)$
è retta:

$$\dim_{\mathbb{P}}(r_P) = \dim_{\mathbb{P}}(P\vee\pi_1) + \dim_{\mathbb{P}}(P\vee\pi_2) - \dim_{\mathbb{P}}(\overbrace{P\vee\pi_1\vee P\vee\pi_2}^{\geq \pi_1\vee\pi_2 = \mathbb{P}^5})$$
$$= 3+3-5 = 1$$

passa ovviamente per P
e incide π_1 perché $\pi_1, r \leq P\vee\pi_1$ (spazio dim 3)
" π_2 " $\pi_2, r \leq P\vee\pi_2$ (" ").

(Si può anche supporre $\pi_1 = P_0\vee P_1\vee P_2$
$\pi_2 = P_3\vee P_4\vee P_5$
e trovare le equazioni di r_P per P generico $\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_5\end{pmatrix}$ ...)

relazione r_P, r_Q:
possono essere
- sghembe se $r_P\cap\pi_1 \neq r_Q\cap\pi_1$, $r_P\cap\pi_2 \neq r_Q\cap\pi_2$ — sse $P\vee Q$ sghemba con π_1, π_2
- incidenti in un solo in punti di π_1 o di π_2, se $r_P\cap\pi_1 = r_Q\cap\pi_1$ oppure $r_P\cap\pi_2 = r_Q\cap\pi_2$ — sse $P\vee Q$ interseca π_1 e non π_2 o viceversa.
- coincidenti se valgono entrambe le condizioni precedenti — sse $P\vee Q$ interseca sia π_1 sia π_2

Duali: dati due piani sghembi in $\mathbb{P}^5$ (ipotesi autoduale!)
per ogni iperpiano non contenente i due piani,
esiste un unico spazio di dimensione 3
contenuto nell'iperpiano e che interseca i due
piani in rette.
Dati due iperpiani, i 3-spazi corrispondenti possono
essere ....

③
A,B,C vertici di triangolo, a,b,c lati
A',A'' ∈ a, B',B'' ∈ b, C',C'' ∈ c:

scegliamo un riferimento con
$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ e quindi

$A'\begin{pmatrix}0\\1\\a'\end{pmatrix}$, $A''\begin{pmatrix}0\\1\\a''\end{pmatrix}$, $B'\begin{pmatrix}1\\0\\b'\end{pmatrix}$, $B''\begin{pmatrix}1\\0\\b''\end{pmatrix}$, $C'\begin{pmatrix}1\\c'\\0\end{pmatrix}$, $C''\begin{pmatrix}1\\c''\\0\end{pmatrix}$

se $\exists\varphi: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ come chiesto,
allora la matrice nel rif. scelto sarà diagonale
$H = \begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}$ perché A B C sono uniti,

e deve essere
$\varphi A' = A''$ ie $H\begin{pmatrix}0\\1\\a'\end{pmatrix} \overset{\times}{=} \begin{pmatrix}0\\1\\a''\end{pmatrix}$
$\varphi B' = B''$ ie $H\begin{pmatrix}1\\0\\b'\end{pmatrix} \overset{\times}{=} \begin{pmatrix}1\\0\\b''\end{pmatrix}$
$\varphi C' = C''$ ie $H\begin{pmatrix}1\\c'\\0\end{pmatrix} \overset{\times}{=} \begin{pmatrix}1\\c'\\0\end{pmatrix}$

cioè
$$\begin{cases}\begin{vmatrix}\beta&1\\\gamma a'&a''\end{vmatrix} = 0\\\begin{vmatrix}\alpha&1\\\gamma b'&b''\end{vmatrix} = 0\\\begin{vmatrix}\alpha&1\\\beta c'&c''\end{vmatrix} = 0\end{cases} \quad \begin{cases}\beta a'' = \gamma a'\\\alpha b'' = \gamma b'\\\alpha c'' = \beta c'\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{\beta}{\gamma} = \frac{a'}{a''}\\\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{b'}{b''}\\\frac{\alpha}{\beta} = \frac{c'}{c''}\end{cases}$$

da cui $\frac{a'}{a''}\,\frac{b''}{b'}\,\frac{c'}{c''} = 1$

D'altra parte i birapporti richiesti sono:
$$(ABC'C'') = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\c'\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\c''\\0\end{pmatrix}\right) = (\infty\ 0\ \tfrac{1}{c'}\ \tfrac{1}{c''}) = \frac{c'}{c''}$$
$$(BCA'A'') = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\a'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\a''\end{pmatrix}\right) = (\infty\ 0\ \tfrac{1}{a'}\ \tfrac{1}{a''}) = \frac{a'}{a''}$$
$$(CAB'B'') = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\b'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\b''\end{pmatrix}\right) = (\infty\ 0\ b'\ b'') = \frac{b''}{b'}$$
e si vede che è equivalente alla condizione
trovata prima.

Viceversa, se vale la condizione sui birapporti,
definiamo φ tramite la matrice diagonale
$$H = \begin{pmatrix}b'/b''&&\\&a'/a''&\\&&1\end{pmatrix}$$ e allora risulta
$H\begin{pmatrix}1\\0\\b'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b'/b''\\0\\b'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\b''\end{pmatrix}$
$H\begin{pmatrix}0\\1\\a'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\a'/a''\\a'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\a''\end{pmatrix}$
$H\begin{pmatrix}1\\c'\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b'/b''\\c'a'/a''\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\c'\frac{a'}{a''}\frac{b''}{b'}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\c''\\0\end{pmatrix}$

come si voleva ($\varphi A' = A''$, $\varphi B' = B''$, $\varphi(C') = C''$).

Poi: A'', B'', C'' sono allineati:

data condizione ⇒ ∃ proiettività φ ⇒ A'B'C' allineati
A'B'C' allineati ⇒ ∃ proiettività φ ⇒ vale condizione.
(perché $ABC \mapsto ABC$
e $A' \mapsto A''$
$B' \mapsto B''$
esiste per teorema fond.,
e $C' \mapsto$ retta $A''B'' \wedge$ retta $AB = C''$)

Poi: usando A''B''C'' allineati, e questa come retta
impropria del piano affine complementare,
la condizione diventa $(ABC')(BCA')(CAB') = 1$.

Resta da dualizzare.

④
$\varphi \circlearrowleft \mathbb{P}^4(\mathbb{K})$ ha esattamente tre punti uniti

le forme di Jordan possibili devono avere tre blocchi
di Jordan elementari relativi ad autovalori distinti,
quindi sono solo queste due:
$$\begin{pmatrix}\alpha&&&\\&\beta&&\\&&\gamma&1\\&&&\gamma\end{pmatrix} \quad o \quad \begin{pmatrix}\alpha&&&\\&\beta&1&\\&&\beta&\\&&&\gamma\ \ 1\\&&&\ \ \ \gamma\end{pmatrix}$$

per il primo abbiamo:
3 punti uniti (P_0, P_1, P_2)
3 iperpiani uniti:
$P_0\vee P_1\vee P_2\vee P_3$ con 3 punti uniti, quindi 3 piani uniti
$(P_0P_1P_2,\ P_0P_2P_3,\ P_1P_2P_3)$
$P_0\vee P_2\vee P_3\vee P_4$ con 2 punti uniti, quindi 2 piani uniti
$(P_0P_2P_3,\ P_2P_3P_4)$
$P_1\vee P_2\vee P_3\vee P_4$ con 2 punti uniti, quindi 2 piani uniti
$(P_1P_2P_3,\ P_2P_3P_4)$
in totale vi sono allora 4 piani uniti,
e per dualità 4 rette unite $(P_0P_1,\ P_0P_2,\ P_0P_3,\ P_2P_3)$.

per il secondo abbiamo:
3 punti uniti (P_0, P_1, P_3)
3 iperpiani uniti:
$P_0P_1P_2P_3$ con 3 punti uniti, quindi 3 piani uniti
$(P_0P_1P_2,\ P_0P_1P_3,\ P_1P_2P_3)$
$P_0P_1P_3P_4$ con 3 punti uniti, quindi 3 piani uniti
$(P_0P_1P_3,\ P_0P_3P_4,\ P_1P_3P_4)$
$P_1P_2P_3P_4$ con 2 punti uniti, quindi 2 piani uniti
$(P_1P_2P_3,\ P_1P_3P_4)$
in totale vi sono 5 piani uniti, quindi 5 rette unite
$(P_0P_1,\ P_0P_3,\ P_1P_3,\ P_1P_2,\ P_3P_4)$.

Le rette unite hanno proiettività indotte del tipo

$\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$ con $\alpha\neq\beta$,
e allora: senza perdere generalità...
$P = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\varphi Q = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, $\varphi^n Q = \begin{pmatrix}\alpha^n\\\beta^n\end{pmatrix}$
$(P\,Q\,\varphi Q\,\varphi^n Q) = (\infty\ 1\ \rho\ \rho^n) = \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}$ //
$\rho = \alpha/\beta$

oppure
$\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$ e allora: senza perdere generalità... $P = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\varphi Q = \begin{pmatrix}1\\\alpha\end{pmatrix}$, $\varphi^n Q = \begin{pmatrix}n\alpha^{n-1}\\\alpha^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n\\\alpha\end{pmatrix}$

$(P\,Q\,\varphi Q\,\varphi^n Q) = (\infty\ 0\ \tfrac{1}{\alpha}\ \tfrac{n}{\alpha}) = n$ //

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Si determinino le equazioni di tutte le rette complanari con ciascuna delle tre date (sugg.: per ogni punto T di t si calcoli la retta per T e complanare con r, s; in questo modo si "perde" qualche retta?). Si descriva con una equazione cartesiana l'insieme formato dalla unione di tali rette.

Si trovino, se esistono, tutte le affinità che mandano tale insieme in sè.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati due piani:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini la posizione reciproca, in particolare equazioni cartesiane per lo spazio affine generato; si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza, l'angolo tra i piani.

Si determinino, se esistono, tutte le isometrie ϕ tali che $\phi(\pi_1) = \pi_1$ e $\phi(\pi_2) = \pi_2$. Si determinino. se esistono, tutte le isometrie ψ tali che $\psi(\pi_1) = \pi_2$ e $\psi(\pi_2) = \pi_1$.

Esercizio 3. In uno spazio proiettivo di dimensione 3 sono dati tre triangoli non complanari e prospettivi dallo stesso punto. Mostrare che le tre rette di omologia (delle tre coppie di triangoli prospettivi) sono sempre concorrenti in un punto, e caratterizzare i casi in cui coincidono (sugg.: considerare i birapporti sulle tre rette di prospettività).

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti tutti e soli quelli di due rette sghembe. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, sia P un punto unito e Q un punto non unito; determinare il birapporto $(P\ Q\ \phi Q\ \phi^{-1}Q)$.

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva con una equazione cartesiana l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati un piano e una retta:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad r = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza, l'angolo tra loro.

Si determinino, se esistono, tutte le isometrie ϕ tali che $\phi(\pi) = \pi$ e $\phi(r) = r$.

Esercizio 3. In uno spazio proiettivo (di dimensione 3) sono date tre rette non complanari e concorrenti in un punto O, e su ciascuna retta tre punti distinti e distinti da O. Applicando il teorema di Pappo alle tre coppie di rette si ottengono tre rette di collineazione (su tre piani diversi). Discutere le posizioni reciproche di queste rette, in particolare caratterizzare i casi un cui sono in un fascio, o in cui due si intersecano (risposta in termini di birapporti dei punti sulle rette date).

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti tutti e soli quelli di un piano e un punto esterno al piano. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, sia Q un punto non unito; determinare il birapporto $(Q\ \phi Q\ \phi^2 Q\ \phi^3 Q)$.

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t non appartenenente ad $r \cup s$, si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati due piani:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza.

Si determinino, se esistono, tutte le isometrie ϕ tali che $\phi(\pi) = \pi$ e $\phi(\sigma) = \sigma$.

Esercizio 3. In uno piano proiettivo sono date due rette a, b concorrenti in un punto $O = a \wedge b$, e su ciascuna retta tre punti distinti $A_0, A_1, A_2 \in a$, $B_0, B_1, B_2 \in b$ e distinti da O. Applicando il teorema di Pappo si ottiene la retta di collineazione c contenente i tre punti $C_0 = (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $C_1 = (A_0 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_0)$, $C_2 = (A_0 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_0)$. Siano infine $O_a = c \wedge a$, $O_b = c \wedge b$. Determinare la retta di collineazione per i punti $A_0, A_1, A_2 \in a$ e $C_0, C_1, C_2 \in c$ e per i punti $B_0, B_1, B_2 \in b$ e $C_0, C_1, C_2 \in c$. Discutere le relazioni tra i birapporti delle quaterne di punti in cui il primo punto è uno tra O, O_a, O_b e i successivi tre una terna tra $A_0, A_1, A_2 \in a$, $B_0, B_1, B_2 \in b$, $C_0, C_1, C_2 \in c$ (quando hanno senso?).

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti tutti e soli quelli di una retta e due punti esterni alla retta. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, siano P, Q due punti non uniti; determinare il birapporto $(P\ Q\ \phi P\ \phi Q)$.

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t non appartenente ad $r \cup s$, si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati due piani:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza.

Si determinino, se esistono, tutte le isometrie ϕ tali che $\phi(\pi) = \pi$ e $\phi(\sigma) = \sigma$.

Esercizio 3. In un piano proiettivo sono date due rette a, b, sia $O = a \wedge b$, e un punto esterno C. Per ogni coppia $A_0, A_1 \in a$ di punti in a distinti e diversi da O, siano $B_0, B_1 \in b$ i punti di b che si ottengono proiettando da C (cioè $B_i = b \wedge (C \vee A_i)$). Mostrare che tutti i punti $(A_0 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_0)$ sono allineati su una retta c passante per O.

Mostrare che la retta c è quarta armonica dopo a, b e $O \vee C$ (nel fascio di centro O).

Dualizzare la costruzione.

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti tutti e soli quelli di due rette sghembe tra loro. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, siano P, Q due punti non uniti; determinare il birapporto $(P\ \phi P\ Q\ \phi Q)$.

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t non appartenente ad $r \cup s$, si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati un piano e una retta:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad r = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza, l'angolo tra loro.

Si determinino, se esistono, tutte le isometrie ϕ tali che $\phi(\pi) = \pi$ e $\phi(r) = r$.

Esercizio 3. In un piano proiettivo sono dati due triangoli di vertici A, B, C e A', B', C' prospettivi dal punto O (sia r la retta di omologia dei due triangoli). Sia ϕ la proiettività che fissa O e manda ordinatamente il primo triangolo nel secondo. Siano A'', B'', C'' le immagini di A', B', C' tramite ϕ.

Dimostrare che ϕ è omologia e determinarne centro e asse; trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché ϕ sia involuzione.

Dimostrare che i birapporti $(O\ A\ A'\ A'')$, $(O\ B\ B'\ B'')$, $(O\ C\ C'\ C'')$ sono sempre uguali tra loro, e caratterizzare in base a tale birapporto la condizione $O \in r$ (retta di omologia dei triangoli contiene il punto di prospettività).

Dualizzare la costruzione.

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti tutti e soli quelli di una retta ed un piano sghembi tra loro. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, siano P, Q due punti non uniti; determinare il birapporto $(P\ \phi P\ Q\ \phi Q)$. Per quante (e quali) coppie di punti su quella retta questo birapporto risulta uguale?

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare tutte le radici in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(Z-i)^3 = 8$.
(a) Determinare equazioni cartesiane ed hermitiane delle rette per le tre radici trovate.
(b) Determinare le equazioni hermitiane delle circonferenze ottenute dalle rette precedenti per inversione rispetto al cerchio unitario.
(c) Rappresentare il tutto nel piano di Gauss e descrivere l'immagine tramite l'inversione precedente dei punti interni del triangolo (i cui vertici sono le radici trovate).

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U_1 = \langle e_1 + e_3 + e_4 \ , \ e_3 - e_4 \rangle \quad , \quad U_2 : \begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ X_2 - X_4 = 0 \end{cases} \quad , \quad U_3 : \begin{cases} 2X_1 - X_4 = 0 \\ X_2 - X_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare basi ed equazioni cartesiane per i seguenti due sottospazi di K^4:

$$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \qquad \text{e} \qquad U_1 \cap (U_2 + U_3).$$

(b) In generale, per tre sottospazi U_1, U_2, U_3 di uno spazio vettoriale V, mostrare che

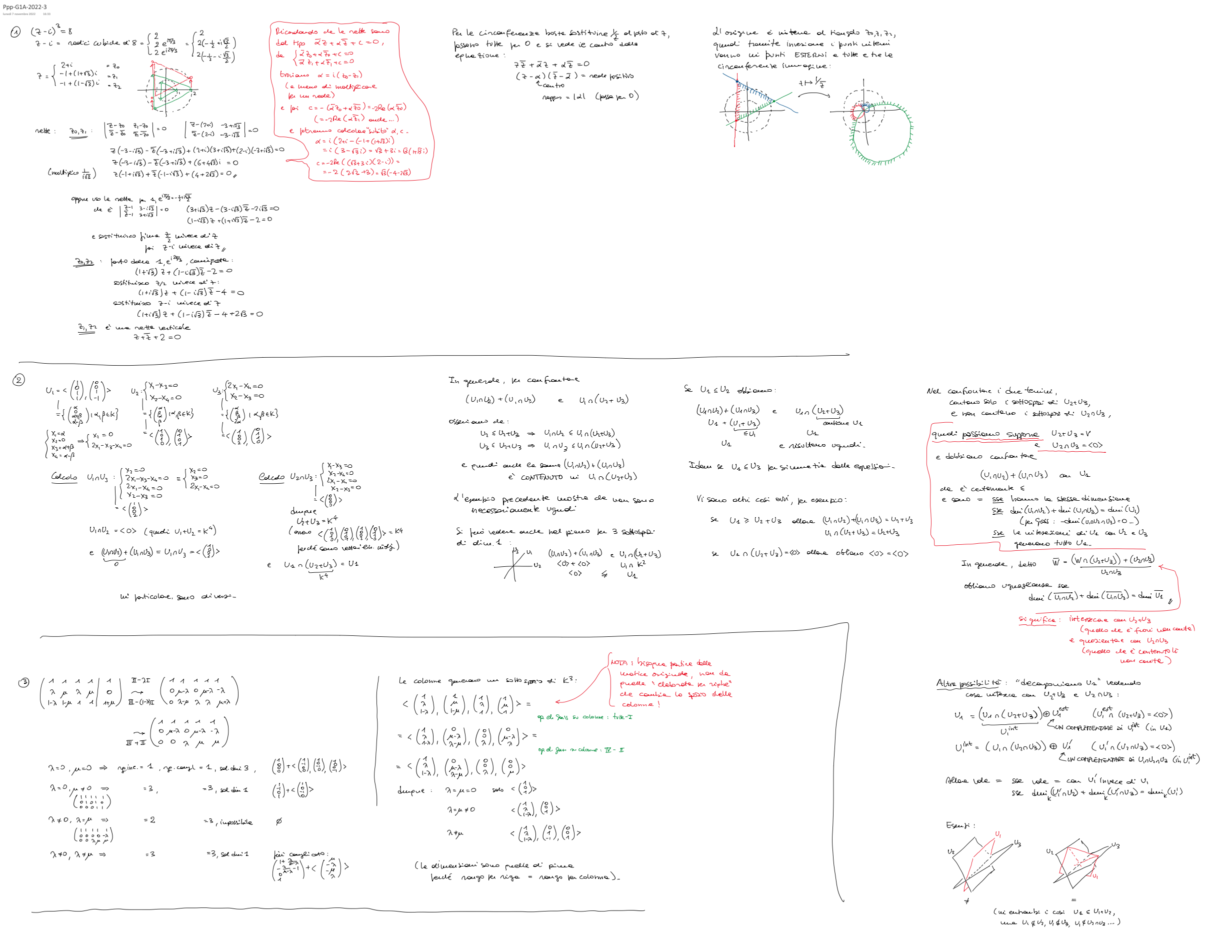
$$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \leq U_1 \cap (U_2 + U_3)$$

e mostrare che non vale necessariamente l'uguaglianza. Controllare che l'uguaglianza vale se $U_1 \leq U_2$ oppure $U_1 \leq U_3$.
(c) Vi sono altre condizioni per cui vale l'uguaglianza? Determinare se possibile condizioni necessarie e sufficienti sui tre spazi affinché valga l'uguaglianza.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema lineare con incognite X_1, X_2, X_3, X_4 e parametri λ, μ:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1 \\ \lambda X_1 + \mu X_2 + \lambda X_3 + \mu X_4 = 0 \\ (1-\lambda)X_1 + (1-\mu)X_2 + X_3 + X_4 = 1 + \mu \end{cases}$$

(a) Scrivere la matrice completa del sistema e determinare i ranghi delle matrici completa e incompleta al variare dei parametri.
(b) Determinare per quali valori dei parametri il sistema ammette soluzione, e determinare tali soluzioni.
(c) Determinare una base dello spazio generato dalle colonne della matrice incompleta del sistema.



Ppp-G1A-2022-3
lunedì 7 novembre 2022 16:33

① $(z-i)^3=8$

$z-i$ = radici cubiche di 8 $=\begin{cases}2\\ 2e^{i\pi/3}\\ 2e^{i2\pi/3}\end{cases}=\begin{cases}2\\ 2(-\frac12+i\frac{\sqrt3}{2})\\ 2(-\frac12-i\frac{\sqrt3}{2})\end{cases}$

$z=\begin{cases}2+i & =z_0\\ -1+(1+\sqrt3)i & =z_1\\ -1+(1-\sqrt3)i & =z_2\end{cases}$

rette: $\underline{z_0,z_1}$: $\begin{vmatrix} z-z_0 & z_1-z_0\\ \bar z-\bar z_0 & \bar z_1-\bar z_0\end{vmatrix}=0$ $\quad\begin{vmatrix} z-(2+i) & -3+i\sqrt3\\ \bar z-(2-i) & -3-i\sqrt3\end{vmatrix}=0$

$z(-3-i\sqrt3)-\bar z(-3+i\sqrt3)+(2+i)(3+i\sqrt3)+(2-i)(-3+i\sqrt3)=0$

$z(-3-i\sqrt3)-\bar z(-3+i\sqrt3)+(6+4\sqrt3)i=0$

(moltiplico $\frac{1}{i\sqrt3}$) $z(-1+i\sqrt3)+\bar z(-1-i\sqrt3)+(4+2\sqrt3)=0$ //

Ricordando che le rette sono del tipo $\bar\alpha z+\alpha\bar z+c=0$,
da $\begin{cases}\bar\alpha z_0+\alpha\bar z_0+c=0\\ \bar\alpha z_1+\alpha\bar z_1+c=0\end{cases}$
troviamo $\alpha=i(z_0-z_1)$
(a meno di moltiplicare per un reale)
e poi $c=-(\bar\alpha z_0+\alpha\bar z_0)=-2\mathrm{Re}(\alpha\bar z_0)$
$(=-2\mathrm{Re}(\alpha\bar z_1)$ anche...$)$
e potremmo calcolare "subito" α, c.
$\alpha=i(2+i-(-1+(1+\sqrt3)i))$
$=i(3-\sqrt3 i)=\sqrt3+3i=\sqrt3(1+\sqrt3 i)$
$c=-2\mathrm{Re}((\sqrt3+3i)(2-i))=$
$=-2(2\sqrt3+3)=\sqrt3(-4-2\sqrt3)$

oppure uso la retta per $1, e^{i\pi/3}=-\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}$
che è $\begin{vmatrix} z-1 & 3-i\sqrt3\\ \bar z-1 & 3+i\sqrt3\end{vmatrix}=0$ $\quad(3+i\sqrt3)z-(3-i\sqrt3)\bar z-2i\sqrt3=0$
$(1-i\sqrt3)z+(1+i\sqrt3)\bar z-2=0$

e sostituisco prima $\frac z2$ invece di z
poi $z-i$ invece di z //

$\underline{z_0,z_2}$: parto dalla $1, e^{i2\pi/3}$, coniugata:
$(1+i\sqrt3)z+(1-i\sqrt3)\bar z-2=0$
sostituisco $z/2$ invece di z:
$(1+i\sqrt3)z+(1-i\sqrt3)\bar z-4=0$
sostituisco $z-i$ invece di z
$(1+i\sqrt3)z+(1-i\sqrt3)\bar z-4+2\sqrt3=0$

$\underline{z_1,z_2}$ è una retta verticale
$z+\bar z+2=0$

Per le circonferenze basta sostituire $\frac1{\bar z}$ al posto di z, passano tutte per 0 e si vede il centro dalla equazione:

$z\bar z+\bar\alpha z+\alpha\bar z=0$

$(z-\alpha)(\bar z-\bar\alpha)$ = reale positivo
↖centro
raggio $=|\alpha|$ (passa per 0)

L'origine è interna al triangolo z_0,z_1,z_2, quindi tramite inversione i punti interni vanno nei punti ESTERNI a tutte e tre le circonferenze immagine:

$z\mapsto 1/\bar z$

---

② $U_1=<\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}>$ $=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\alpha+\beta\\\alpha-\beta\end{pmatrix} \mid \alpha,\beta\in K\right\}$

$\begin{cases}x_1=\alpha\\x_2=0\\x_3=\alpha+\beta\\x_4=\alpha-\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=0\\2x_1-x_3-x_4=0\end{cases}$

$U_2:\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$ $=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\alpha\\\beta\end{pmatrix}\mid\alpha,\beta\in K\right\}$ $=<\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}>$

$U_3:\begin{cases}2x_1-x_4=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$ $=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\beta\\2\alpha\end{pmatrix}\mid\alpha,\beta\in K\right\}$ $=<\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}>$

<u>Calcolo</u> $U_1\cap U_3$: $\begin{cases}x_2=0\\2x_1-x_3-x_4=0\\2x_1-x_4=0\\x_2-x_3=0\end{cases}\equiv\begin{cases}x_2=0\\x_3=0\\2x_1-x_4=0\end{cases}$ $=<\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}>$

$U_1\cap U_2=<0>$ (quindi $U_1+U_2=K^4$)

e $\underbrace{(U_1\cap U_2)}_{0}+(U_1\cap U_3)=U_1\cap U_3=<\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}>$

<u>Calcolo</u> $U_2\cap U_3$: $\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_4=0\\2x_1-x_4=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$ $=<\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}>$

dunque
$U_2+U_3=K^4$
(ovvero $<\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}>=K4$
perché sono vettori lin. indip.)

e $U_1\cap\underbrace{(U_2+U_3)}_{K^4}=U_1$

in particolare sono diversi.

In generale, per confrontare

$(U_1\cap U_2)+(U_1\cap U_3)$ e $U_1\cap(U_2+U_3)$

osserviamo che:
$U_2\leq U_2+U_3\Rightarrow U_1\cap U_2\leq U_1\cap(U_2+U_3)$
$U_3\leq U_2+U_3\Rightarrow U_1\cap U_3\leq U_1\cap(U_2+U_3)$

e quindi anche la somma $(U_1\cap U_2)+(U_1\cap U_3)$
è CONTENUTO in $U_1\cap(U_2+U_3)$

L'esempio precedente mostra che non sono necessariamente uguali

Si può vedere anche nel piano per 3 sottospazi di dim. 1:

$(U_1\cap U_2)+(U_1\cap U_3)$ e $U_1\cap(U_2+U_3)$
$<0>+<0>$ $\quad U_1\cap K^2$
$<0>\ \lneq\ U_1$

Se $U_1\leq U_2$ otteniamo:

$(U_1\cap U_2)+(U_1\cap U_3)$ e $U_1\cap\underbrace{(U_2+U_3)}_{\text{contiene } U_1}$
$U_1+\underbrace{(U_1+U_3)}_{\leq U_1}$ $\quad U_1$
U_1 e risultano uguali.

Idem se $U_1\leq U_3$ per simmetria delle espressioni.

Vi sono altri casi ovvi, per esempio:

se $U_1\geq U_2+U_3$ allora $(U_1\cap U_2)+(U_1\cap U_3)=U_2+U_3$
$U_1\cap(U_2+U_3)=U_2+U_3$

se $U_1\cap(U_2+U_3)=<0>$ allora otteniamo $<0>=<0>$

Nel confrontare i due termini,
contano solo i sottospazi di U_2+U_3,
e non contano i sottospazi di $U_2\cap U_3$,

quindi possiamo supporre $U_2+U_3=V$
e $U_2\cap U_3=<0>$
e dobbiamo confrontare
$(U_1\cap U_2)+(U_1\cap U_3)$ con U_1
che è certamente $\leq$
e sono $=$ <u>sse</u> hanno la stessa dimensione
<u>sse</u> $\dim(U_1\cap U_2)+\dim(U_1\cap U_3)=\dim(U_1)$
(per Grass: $-\dim(U_1\cap U_2\cap U_3)=0$ ...)
<u>sse</u> le intersezioni di U_1 con U_2 e U_3 generano tutto U_1.

In generale, detto $\bar W=\dfrac{(W\cap(U_2+U_3))+(U_2\cap U_3)}{U_2\cap U_3}$

abbiamo uguaglianza sse
$\dim(\overline{U_1\cap U_2})+\dim(\overline{U_1\cap U_3})=\dim\overline{U_1}$ //

<u>Significa</u>: intersecare con U_2+U_3
(quello che è fuori non conta)
e quozientare con $U_2\cap U_3$
(quello che è contenuto lì non conta)

<u>Altre possibilità</u>: "decomponiamo U_1" vedendo
cosa interseca con U_2+U_3 e $U_2\cap U_3$:

$U_1=\underbrace{(U_1\cap(U_2+U_3))}_{U_1^{int}}\oplus U_1^{est}$ $\quad(U_1^{est}\cap(U_2+U_3)=<0>)$
↖UN COMPLEMENTARE di U_1^{int} (in U_1)

$U_1^{int}=(U_1\cap(U_2\cap U_3))\oplus U_1'$ $\quad(U_1'\cap(U_2\cap U_3)=<0>)$
↖UN COMPLEMENTARE di $U_1\cap U_2\cap U_3$ (in U_1^{int})

Allora vale $=$ sse vale $=$ con U_1' invece di U_1
sse $\dim_K(U_1'\cap U_2)+\dim_K(U_1'\cap U_3)=\dim_K(U_1')$

Esempi:

U_2 $\quad U_1$ $\quad U_3$ $\qquad U_2$ $\quad U_3$ $\quad U_1$

$\neq$ $\qquad =$

(in entrambi i casi $U_1\leq U_1+U_2$,
ma $U_1\nsubseteq U_2$, $U_1\nsubseteq U_3$, $U_1\nsubseteq U_2\cap U_3$ ...)

---

③ $\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\\lambda&\mu&\lambda&\mu&0\\1-\lambda&1-\mu&1&1&1+\mu\end{array}\right)\xrightarrow[\text{III}-(1-\lambda)\text{I}]{\text{II}-\lambda\text{I}}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&\mu-\lambda&0&\mu-\lambda&-\lambda\\0&\lambda-\mu&\lambda&\lambda&\mu+\lambda\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{III}+\text{II}]{}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&\mu-\lambda&0&\mu-\lambda&-\lambda\\0&0&\lambda&\mu&\mu\end{pmatrix}$

$\lambda=0,\mu=0\Rightarrow$ rg.inc. $=1$, rg.compl $=1$, sol. dim 3, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+<\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}>$

$\lambda=0,\mu\neq0\Rightarrow$ $=3$, $=3$, sol dim 1 $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+<\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}>$
$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$

$\lambda\neq0,\lambda=\mu\Rightarrow$ $=2$, $=3$, impossibile $\varnothing$
$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&0&-\lambda\\0&0&\lambda&\mu&\mu\end{pmatrix}$

$\lambda\neq0,\lambda\neq\mu\Rightarrow$ $=3$, $=3$, sol dim 1 più complicato: $\begin{pmatrix}1+\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\\-\frac{\lambda}{\mu-\lambda}-1\\0\\1\end{pmatrix}+<\begin{pmatrix}\mu\\-\lambda\\-\mu\\\lambda\end{pmatrix}>$

Le colonne generano un sottospazio di K^3:

$<\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1-\lambda\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\mu\\1-\mu\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\mu\\1\end{pmatrix}>=$

NOTA: bisogna partire dalla matrice originale, non da quelle "elaborate per righe" che cambia lo spazio delle colonne!

op. di Gauss su colonne: tutte $-$I

$=<\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1-\lambda\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\mu-\lambda\\\lambda-\mu\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\lambda\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\mu-\lambda\\\lambda\end{pmatrix}>=$

op. di Gauss su colonne: IV $-$ II

$=<\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1-\lambda\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\mu-\lambda\\\lambda-\mu\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\lambda\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\mu\end{pmatrix}>$

dunque: $\lambda=\mu=0$ solo $<\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}>$

$\lambda=\mu\neq0$ $\quad<\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1-\lambda\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}>$

$\lambda\neq\mu$ $\quad<\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1-\lambda\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}>$

(le dimensioni sono quelle di prima perché rango per riga = rango per colonna).

Testo del compito:

Esercizio 1. Siano dati i seguenti sottospazi di $V_4(\mathbb{Q})$:

$$U = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle \quad V = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle \quad W = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle$$

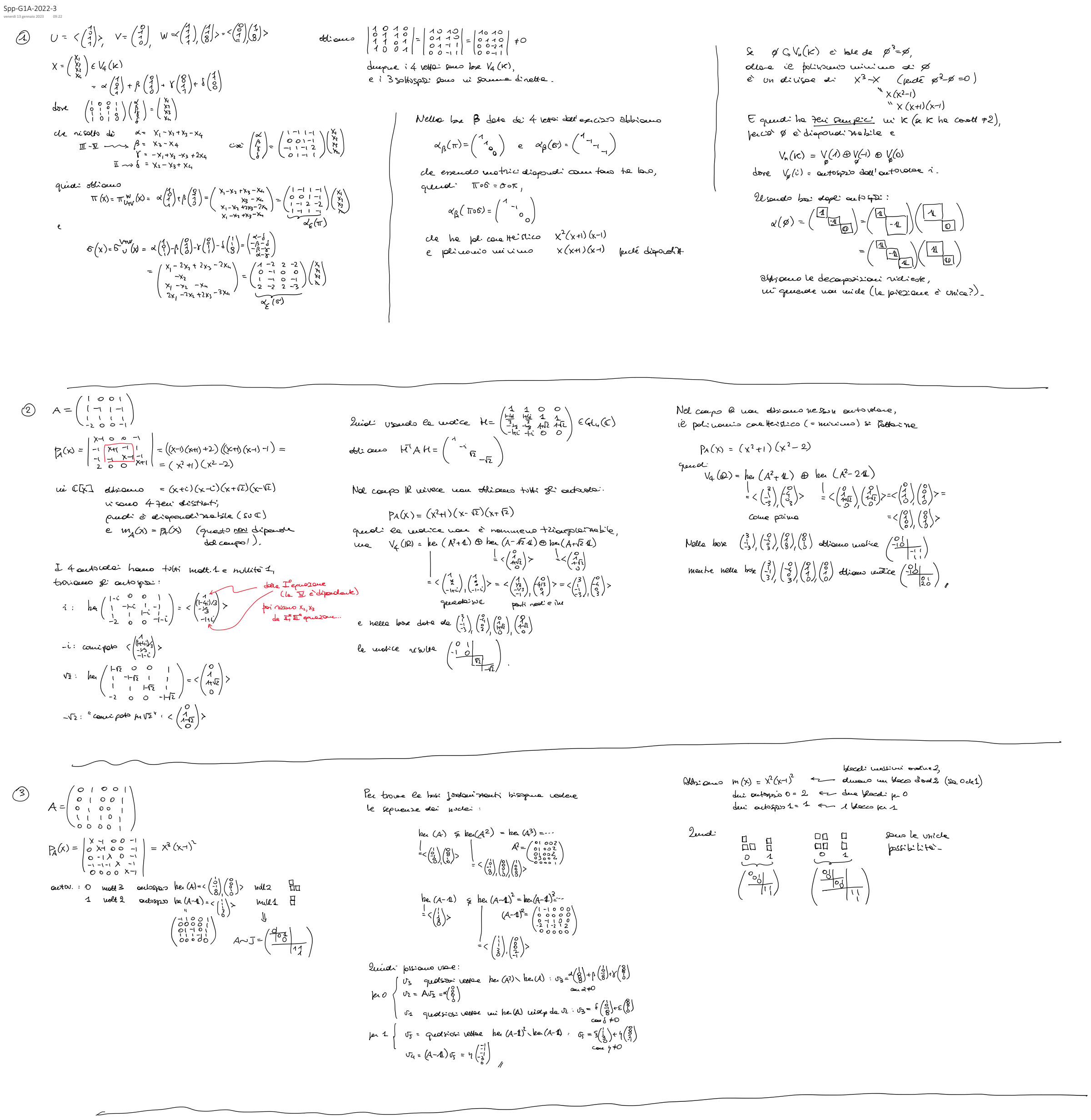
(1) determinare le matrici nella base canonica della proiezione π di asse $U+V$ e direzione W, e della simmetria σ di asse U e direzione $V+W$;
(2) mostrare che $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$ e determinarne i polinomi caratteristico e minimo.
(3) dato un endomorfismo ϕ di $V_n(K)$ tale che $\phi^3 = \phi$, mostrare che ϕ è diagonalizzabile, e che è composizione di una simmetria e di una proiezione opportune. Tale fattorizzazione è unica?

Esercizio 2. Sia $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ la funzione lineare di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.
(1) determinare il polinomio caratteristico $p_A(X)$ e il polinomio minimo $m_A(X)$ di A;
(2) discutere la diagonalizzabilità di A su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile $H \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;
(3) discutere la diagonalizzabilità di A su $\mathbb{R}$ ed eventualmente trovare una matrice reale simile ad A a blocchi diagonali più semplici possibili;
(4) discutere la diagonalizzabilità di A su $\mathbb{Q}$ ed eventualmente trovare una matrice razionale simile ad A a blocchi diagonali più semplici possibili;

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in base canonica.
(1) Determinare la forma di Jordan di ϕ, delle sue potenze e delle potenze di $\phi - \mathrm{id}$.
(2) Trovare tutte le basi di K^5 jordanizzanti per ϕ.
(3) Determinare tutte le possibili matrici di Jordan (d'ordine qualsiasi) aventi stesso polinomio minimo e stesse dimensioni degli autospazi della matrice A.



Spp-G1A-2022-3
venerdì 13 gennaio 2023 09:22

① $U=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle,\quad V=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad W=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

abbiamo $\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-2&1\\0&0&-1&1\end{vmatrix}\neq0$

dunque i 4 vettori sono base $V_4(K)$,
e i 3 sottospazi sono in somma diretta.

$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in V_4(K)$
$=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

dove $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

che risolto dà
$\alpha=x_1-x_2+x_3-x_4$
III - IV $\rightsquigarrow\beta=x_3-x_4$
$\gamma=-x_1+x_2-x_3+2x_4$
II $\rightsquigarrow\delta=x_2-x_3+x_4$

cioè $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&1&-1\\-1&1&-1&2\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

quindi abbiamo
$$\pi(X)=\pi^W_{U+V}(X)=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2+x_3-x_4\\x_3-x_4\\x_1-x_2+2x_3-2x_4\\x_1-x_2+x_3-x_4\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&1&-1\\1&-1&2&-2\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}}_{\alpha_\varepsilon(\pi)}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

e

$$\sigma(X)=\sigma^{V+W}_U(X)=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-\delta\\-\beta-\delta\\-\beta-\gamma\\\alpha-\gamma\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x_1-2x_2+2x_3-2x_4\\-x_2\\x_1-x_2-x_4\\2x_1-2x_2+2x_3-3x_4\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&-2&2&-2\\0&-1&0&0\\1&-1&0&-1\\2&-2&2&-3\end{pmatrix}}_{\alpha_\varepsilon(\sigma)}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

Nella base β data dai 4 vettori dell'esercizio abbiamo
$\alpha_\beta(\pi)=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}$ e $\alpha_\beta(\sigma)=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$

che essendo matrici diagonali commutano tra loro,
quindi $\pi\circ\sigma=\sigma\circ\pi$,
$\alpha_\beta(\pi\circ\sigma)=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}$

che ha pol. caratteristico $X^2(X+1)(X-1)$
e polinomio minimo $X(X+1)(X-1)$ perché diagonalizz.

Se $\phi\circlearrowleft V_n(K)$ è tale che $\phi^3=\phi$,
allora il polinomio minimo di ϕ
è un divisore di X^3-X (perché $\phi^3-\phi=0$)
$\quad = X(X^2-1)$
$\quad = X(X+1)(X-1)$

E quindi ha zeri semplici in K (se K ha caratt $\neq2$),
perciò ϕ è diagonalizzabile e

$$V_n(K)=V_\phi(1)\oplus V_\phi(-1)\oplus V_\phi(0)$$

dove $V_\phi(i)$ = autospazio dell'autovalore i.

Usando basi degli autospazi:
$$\alpha(\phi)=\begin{pmatrix}\boxed{\mathbb{1}}&&\\&\boxed{-\mathbb{1}}&\\&&\boxed{\mathbb{0}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{\mathbb{1}}&\\&\boxed{-\mathbb{1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{\mathbb{1}}&\\&\boxed{\mathbb{0}}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\boxed{\mathbb{1}}&&\\&\boxed{-\mathbb{1}}&\\&&\boxed{\mathbb{1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{\mathbb{1}}&\\&\boxed{\mathbb{0}}\end{pmatrix}$$

abbiamo le decomposizioni richieste,
in generale non unica (la proiezione è unica?).

---

② $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&-1&1&-1\\1&1&1&1\\-2&0&0&-1\end{pmatrix}$

$p_A(X)=\begin{vmatrix}X-1&0&0&-1\\-1&X+1&-1&1\\-1&-1&X-1&-1\\2&0&0&X+1\end{vmatrix}=\big((X-1)(X+1)+2\big)\big((X+1)(X-1)-1\big)=$
$=(X^2+1)(X^2-2)$

in $\mathbb{C}[X]$ abbiamo $=(X+i)(X-i)(X+\sqrt2)(X-\sqrt2)$
ci sono 4 zeri distinti;
quindi è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$)
e $m_A(X)=p_A(X)$ (questo non dipende dal campo!).

I 4 autovalori hanno tutti molt. 1 e nullità 1,
troviamo gli autospazi:

$i:\ \ker\begin{pmatrix}1-i&0&0&1\\1&-1-i&1&-1\\1&1&1-i&1\\-2&0&0&-1-i\end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\(1-4i)/3\\-1/3\\-1+i\end{pmatrix}\right\rangle$

dalla I equazione
(la IV è dipendente)
poi ricavo x_2,x_3
da II, III equazione...

$-i:$ coniugato $\left\langle\begin{pmatrix}1\\(1+4i)/3\\-1/3\\-1-i\end{pmatrix}\right\rangle$

$\sqrt2:\ \ker\begin{pmatrix}1-\sqrt2&0&0&1\\1&-1-\sqrt2&1&1\\1&1&1-\sqrt2&1\\-2&0&0&-1-\sqrt2\end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1+\sqrt2\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

$-\sqrt2:$ "coniugato per $\sqrt2$", $\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1-\sqrt2\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

Quindi usando la matrice $H=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\\frac{1-4i}{3}&\frac{1+4i}{3}&1&1\\-\frac13&-\frac13&1+\sqrt2&1-\sqrt2\\-1+i&-1-i&0&0\end{pmatrix}\in GL_4(\mathbb{C})$

abbiamo $H^{-1}AH=\begin{pmatrix}i&&&\\&-i&&\\&&\sqrt2&\\&&&-\sqrt2\end{pmatrix}$

Nel campo $\mathbb{R}$ invece non abbiamo tutti gli autovalori:

$$p_A(X)=(X^2+1)(X-\sqrt2)(X+\sqrt2)$$

quindi la matrice non è nemmeno triangolarizzabile,
ma $V_4(\mathbb{R})=\ker(A^2+\mathbb{1})\oplus\ker(A-\sqrt2\,\mathbb{1})\oplus\ker(A+\sqrt2\,\mathbb{1})$

$\ker(A-\sqrt2\,\mathbb{1})=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1+\sqrt2\\0\end{pmatrix}\right\rangle\qquad \ker(A+\sqrt2\,\mathbb{1})=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1-\sqrt2\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

$\ker(A^2+\mathbb{1})=\left\langle\underbrace{\begin{pmatrix}1\\ *\\ *\\-1+i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ *\\ *\\-1-i\end{pmatrix}}_{\text{generatori}}\right\rangle=\left\langle\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1/3\\-1/3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4/3\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{parti reali e im}}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\3\end{pmatrix}\right\rangle$

e nella base data da $\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1+\sqrt2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1-\sqrt2\\0\end{pmatrix}$

la matrice risulta $\begin{pmatrix}0&1&&\\-1&0&&\\&&\boxed{\sqrt2}&\\&&&-\sqrt2\end{pmatrix}$.

Nel campo $\mathbb{Q}$ non abbiamo nessun autovalore,
il polinomio caratteristico (= minimo) si fattorizza

$$p_A(X)=(X^2+1)(X^2-2)$$

quindi
$V_4(\mathbb{Q})=\ker(A^2+\mathbb{1})\oplus\ker(A^2-2\mathbb{1})$

$\ker(A^2+\mathbb{1})=\left\langle\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\3\end{pmatrix}\right\rangle$ come prima

$\ker(A^2-2\mathbb{1})=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1+\sqrt2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1-\sqrt2\\0\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

Nella base $\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ abbiamo matrice $\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&&\\-1&0&&\\\hline&&-1&1\\&&1&1\end{array}\right)$

mentre nella base $\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ abbiamo matrice $\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&&\\-1&0&&\\\hline&&0&1\\&&2&0\end{array}\right)$.

---

③ $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

$p_A(X)=\begin{vmatrix}X&-1&0&0&-1\\0&X-1&0&0&-1\\0&-1&X&0&-1\\-1&-1&-1&X&-1\\0&0&0&0&X-1\end{vmatrix}=X^3(X-1)^2$

autov.: 0 molt 3 autospazio $\ker(A)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ null 2 □ □□
1 molt 2 autospazio $\ker(A-\mathbb{1})=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ null 1 □ □

$A-\mathbb{1}=\begin{pmatrix}-1&1&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&1&-1&0&1\\1&1&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$A\sim J=\left(\begin{array}{ccc|cc}0&&&&\\&0&1&&\\&&0&&\\\hline&&&1&1\\&&&&1\end{array}\right)$

Per trovare le basi jordanizzanti bisogna vedere
le sequenze dei nuclei:

$\ker(A)\subsetneq\ker(A^2)=\ker(A^3)=\dots$

$\ker(A)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\qquad A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0&2\\0&1&0&0&2\\0&1&0&0&2\\0&3&0&0&4\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\ker(A^2)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

$\ker(A-\mathbb{1})\subsetneq\ker(A-\mathbb{1})^2=\ker(A-\mathbb{1})^3=\dots$

$\ker(A-\mathbb{1})=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\\0\end{pmatrix}\right\rangle\qquad (A-\mathbb{1})^2=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0\\-2&1&-2&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\ker(A-\mathbb{1})^2=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$

Quindi possiamo usare:

per 0
- v_3 qualsiasi vettore $\ker(A^2)\setminus\ker(A)$: $v_3=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ con $\alpha\neq0$
- $v_2=Av_3=\alpha\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$
- v_1 qualsiasi vettore in $\ker(A)$ indip da v_2 : $v_3=\delta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ con $\delta\neq0$

per 1
- v_5 = qualsiasi vettore $\ker(A-\mathbb{1})^2\setminus\ker(A-\mathbb{1})$: $v_5=\xi\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\\0\end{pmatrix}+\eta\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$ con $\eta\neq0$
- $v_4=(A-\mathbb{1})v_5=\eta\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-3\\0\end{pmatrix}$ //

Abbiamo $m(X)=X^2(X-1)^2$ ← blocchi massimi ordine 2, dunque un blocco d'ord 2 (sia 0 che 1)
dim autospazio 0 = 2 ← due blocchi per 0
dim autospazio 1 = 1 ← 1 blocco per 1

Quindi

□ □
□□ □
0 1

$\left(\begin{array}{ccc|cc}0&&&&\\&0&1&&\\&&0&&\\\hline&&&1&1\\&&&&1\end{array}\right)$

□□ □
□□ □
0 1

$\left(\begin{array}{cc|cc|c}0&1&&&\\&0&&&\\\hline&&0&1&\\&&&0&\\\hline&&&&1\ \ 1\\&&&&\ \ \ 1\end{array}\right)$

sono le uniche possibilità.

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e cartesiana le radici quarte del numero complesso $e^{i4\pi/3}$. Determinare le equazioni hermitiane delle sei rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno e identificare l'immagine tramite l'inversione precedente dei punti esterni al quadrato formato dalle radici trovate.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle \quad , \quad W : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ 2X_2 - X_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad W' : \begin{cases} X_1 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_2 - 2X_4 = 0 \end{cases}$$

(1) Trovare equazioni cartesiane per U e delle basi per W e W'. Dimostrare che U è in somma diretta sia con W che con W'; calcolare $W \cap W'$ e $W + W'$.
(2) Scegliere una base di K^4 e scrivere le matrici in tale base delle simmetrie σ_U^W e $\sigma_U^{W'}$.
(3) Le due simmetrie precedenti commutano tra di loro? Le due composizioni sono simmetrie? Sono diagonalizzabili?

Esercizio 3. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici d'ordine 2 e coefficienti in $\mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $F : V \to V$ cha manda $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} a+c & b+a \\ c+d & d+b \end{pmatrix}$.
(1) Mostrare che F è lineare, e scriverne la matrice nella base canonica di V.
(2) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di F e discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{C}$. *[Sugg.: usare le radici quarte di* 1*, o la differenza di quadrati, o che* 2 *è autovalore]*
(3) Discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{R}$ ed eventualmente trovare una base di V su $\mathbb{R}$ in cui la matrice di F sia a blocchi diagonali (e coefficienti in $\mathbb{R}$) più semplici possibili.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in base canonica.
(1) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di A. Determinare la forma di Jordan di A e una base jordanizzante per ogni potenza ϕ^n con $n > 0$.
(2) Esistono sottospazi W di K^5 tali che ϕ^2 ristretta a W sia diagonalizzabile? Se sì determinarne uno di dimensione massima.
(3) Quali sono le matrici di Jordan (non simili) di ordine 8 aventi lo stesso polinomio minimo di A? Quali sono i possibili polinomi caratteristici, e per ciascuno di essi quante matrici di Jordan vi sono?

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici dell'equazione $(Z-i)^3 = 8$. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno e identificare l'immagine tramite l'inversione precedente dei punti esterni al triangolo formato dalle radici trovate.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle \quad , \quad W : \begin{cases} X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 - 2X_2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad W' : \begin{cases} X_1 - X_3 + X_4 = 0 \\ 2X_1 - X_2 = 0 \end{cases}$$

(1) Trovare equazioni cartesiane per U e delle basi per W e W'. Dimostrare che U è in somma diretta sia con W che con W'; calcolare $W \cap W'$ e $W + W'$.
(2) Scegliere una base di K^4 e scrivere le matrici in tale base delle proiezioni π_U^W e $\pi_U^{W'}$.
(3) Le due proiezioni precedenti commutano tra di loro? Le due composizioni sono proiezioni? Sono diagonalizzabili?

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ lo spazio dei polinomi di grado al più 4 e coefficienti in $\mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $F : V \to V$ cha manda $a+bX+cX^2+dX^3+eX^4$ in $(a+e)+(b+a)X+(c+b)X^2+(d+c)X^3+(e+d)X^4$.
(1) Mostrare che F è lineare, e scriverne la matrice nella base canonica di V.
(2) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di F e discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{C}$.
(3) Discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{R}$ ed eventualmente trovare una base di V su $\mathbb{R}$ in cui la matrice di F sia a blocchi diagonali (e coefficienti in $\mathbb{R}$) più semplici possibili.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

in base canonica.
(1) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di A. Determinare la forma di Jordan di A e una base jordanizzante per ϕ.
(2) Esistono sottospazi W di K^5 tali che ϕ^2 ristretta a W sia diagonalizzabile? Se sì determinarne uno di dimensione massima.
(3) Quali sono le matrici di Jordan (non simili) di ordine 8 aventi lo stesso polinomio minimo di A? Per ciascuna di esse determinare la sequenza delle dimensioni degli autospazi generalizzati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(Z-1)^3 = 27$. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno e identificare l'immagine tramite l'inversione precedente dei punti esterni al triangolo formato dalle radici trovate.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle \quad , \quad W : \begin{cases} X_2 - X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 - 2X_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad W' : \begin{cases} X_1 - X_2 + X_4 = 0 \\ 2X_1 - X_3 = 0 \end{cases}$$

(1) Trovare equazioni cartesiane per U e delle basi per W e W'. Dimostrare che U è in somma diretta sia con W che con W'; calcolare $W \cap W'$ e $W + W'$.
(2) Scegliere una base di K^4 e scrivere le matrici in tale base delle simmetrie σ_U^W e $\sigma_U^{W'}$.
(3) Le due simmetrie precedenti commutano tra di loro? Le due composizioni sono simmetrie? Sono diagonalizzabili?

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio dei polinomi di grado al più 3 e coefficienti in $\mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $F : V \to V$ che manda $a + bX + cX^2 + dX^3$ in $(a+d) + (b+a)X + (c+b)X^2 + (d+c)X^3$.
(1) Mostrare che F è lineare, e scriverne la matrice nella base canonica di V.
(2) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di F e discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{C}$.
(3) Discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{R}$ ed eventualmente trovare una base di V su $\mathbb{R}$ in cui la matrice di F sia a blocchi diagonali (e coefficienti in $\mathbb{R}$) più semplici possibili.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

in base canonica.
(1) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di A. Determinare la forma di Jordan di A e una base jordanizzante per ϕ.
(2) Esistono sottospazi W di K^5 tali che ϕ^2 ristretta a W sia diagonalizzabile? Se sì determinarne uno di dimensione massima.
(3) Quali sono le matrici di Jordan (non simili) di ordine 8 aventi lo stesso polinomio minimo di A? Per ciascuna di esse determinare la sequenza delle dimensioni degli autospazi generalizzati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(Z-1)^4 = -4$. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno e identificare l'immagine tramite l'inversione precedente dei punti interni al quadrato formato dalle radici trovate.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad W : \{ X_2 - X_3 - X_4 = 0 \quad \text{e} \quad W' : \{ X_1 - X_2 + X_4 = 0$$

(1) Trovare equazioni cartesiane per U e delle basi per W e W'. Dimostrare che U è in somma diretta sia con W che con W'; calcolare $W \cap W'$ e $W + W'$.
(2) Scegliere una base di K^4 e scrivere le matrici in tale base delle proiezioni π_W^U e $\pi_{W'}^U$.
(3) Le due proiezione precedenti commutano tra di loro? Le due composizioni sono proiezioni?

Esercizio 3. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e coefficienti in $\mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $F : V \to V$ che manda $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} a-c & b+d \\ c+a & d-b \end{pmatrix}$.
(1) Mostrare che F è lineare, e scriverne la matrice nella base canonica di V.
(2) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di F e discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{C}$, eventualmente trovando una base diagonalizzante per F.
(3) Discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{R}$ ed eventualmente trovare una base di V su $\mathbb{R}$ in cui la matrice di F sia a blocchi diagonali (e coefficienti in $\mathbb{R}$) più semplici possibili.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

in base canonica.
(1) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di A. Determinare la forma di Jordan di A e una base jordanizzante per ϕ.
(2) Esistono sottospazi W di K^5 tali che ϕ^2 ristretta a W sia diagonalizzabile? Se sì determinarne uno di dimensione massima.
(3) Quali sono le matrici di Jordan (non simili) di ordine 8 aventi lo stesso polinomio minimo di A? Per ciascuna di esse determinare la sequenza delle dimensioni degli autospazi generalizzati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(Z-1)^3=-3$. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno e identificare l'immagine tramite l'inversione precedente dei punti interni al triangolo formato dalle radici trovate.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U:\begin{cases}X_2-X_3=0\\ X_3-X_1=0\end{cases}\quad,\quad W=\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\quad\text{e}\quad W'=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

(1) Trovare una base per U e delle equazioni cartesiane per W e W'. Dimostrare che U è in somma diretta sia con W che con W'; calcolare $W\cap W'$ e $W+W'$.
(2) Scegliere una base di K^4 e scrivere le matrici in tale base delle simmetrie σ_W^U e $\sigma_{W'}^U$.
(3) Le due simmetrie precedenti commutano tra di loro? Le due composizioni sono simmetrie? Sono diagonalizzabili?

Esercizio 3. Sia $V=M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e coefficienti in $\mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $F:V\to V$ che manda $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix}a-d&b+c\\c-b&d+a\end{pmatrix}$.
(1) Mostrare che F è lineare, e scriverne la matrice nella base canonica di V.
(2) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di F e discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{C}$, eventualmente trovando una base diagonalizzante per F.
(3) Discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{R}$ ed eventualmente trovare una base di V su $\mathbb{R}$ in cui la matrice di F sia a blocchi diagonali (e coefficienti in $\mathbb{R}$) più semplici possibili.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\\1&0&1&0&1\\1&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

in base canonica.
(1) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di A. Determinare la forma di Jordan di A e una base jordanizzante per ϕ.
(2) Esistono sottospazi W di K^5 tali che $(\phi-1)^2$ ristretta a W sia diagonalizzabile? Se sì determinarne uno di dimensione massima.
(3) Quali sono le matrici di Jordan (non simili) di ordine 8 aventi lo stesso polinomio minimo di A? Per ciascuna di esse determinare la sequenza delle dimensioni degli autospazi generalizzati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(Z-i)^3=-i$. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno e identificare l'immagine tramite l'inversione precedente dei punti interni al triangolo formato dalle radici trovate.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U=\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\rangle \quad , \quad W:\{\, X_2-X_3-X_4=0 \qquad \text{e} \quad W':\{\, X_1-X_2+X_3=0$$

(1) Trovare equazioni cartesiane per U e delle basi per W e W'. Dimostrare che U è in somma diretta sia con W che con W'; calcolare basi per $W\cap W'$ e $W+W'$.
(2) Scegliere una base di K^4 e scrivere le matrici in tale base delle proiezioni π^U_W e $\pi^U_{W'}$.
(3) Le due proiezioni precedenti commutano tra di loro? Le due composizioni sono proiezioni?

Esercizio 3. Sia $V=M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e coefficienti in $\mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $F:V\to V$ che manda $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix}d&a\\b&c\end{pmatrix}$.
(1) Mostrare che F è lineare, e scriverne la matrice nella base canonica di V.
(2) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di F e discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{C}$, eventualmente trovando una base diagonalizzante per F.
(3) Discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{R}$ ed eventualmente trovare una base di V su $\mathbb{R}$ in cui la matrice di F sia a blocchi diagonali (e coefficienti in $\mathbb{R}$) più semplici possibili.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&0&0&0\\1&-2&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

in base canonica.
(1) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di A. Determinare la forma di Jordan di A e una base jordanizzante per ϕ.
(2) Determinare le forme di Jordan di $(\phi+1)^i$ e $(\phi-1)^j$ per $i,j\in\mathbb{N}$.
(3) Quali sono le matrici di Jordan (non simili) di ordine 8 aventi lo stesso polinomio minimo di A? Per ciascuna di esse determinare la sequenza delle dimensioni degli autospazi generalizzati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Siano r, s due rette sghembe in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ con distanza $d = 1$ e angolo $\theta \neq \pi/2$. Sia Γ il gruppo delle isometrie di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ che fissano puntualmente r (cioè le isometrie ϕ tali che $\phi(R) = R$ per ogni $R \in r$).

(1) Per ogni $\phi, \psi \in \Gamma$ determinare la relazione reciproca delle rette $\phi(s)$ e $\psi(s)$.

(2) Per ogni $\phi \in \Gamma$ determinare distanza ed angolo tra s e $\phi(s)$.

(3) Descrivere tramite una equazione cartesiana l'insieme formato dalla unione insiemistica delle rette $\phi(s)$ al variare di ϕ in Γ.

[*Suggerimento: usare un riferimento ortogonale in cui* $r = O + \langle e_1 \rangle$, *la retta di minima distanza di* r *ed* s *sia* $h = O + \langle e_3 \rangle$, *quindi* s *passa per un punto di* h *con direzione ortogonale ad* h, *ma diversa da* e_2 *...*]

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ dotato del riferimento canonico, consideriamo i sottospazi

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(1) Determinare le posizioni reciproche di π ed r come sottospazi affini, determinare la distanza tra π ed r e i punti di minima distanza.

(2) Determinare la proiezione ortogonale r' della retta r sul piano π, e l'angolo θ tra r ed r'; giustificare perché possiamo dire che questo è l'angolo tra r e π.

(3) Dati una retta r e un piano π in $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$, è vero che la distanza e l'angolo tra r e π determinano la posizione reciproca di questi due sottospazi a meno di isometrie?

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$, sono dati due piani π, σ sghembi tra loro.

(1) Mostrare che esistono rette sghembe sia con π che con σ; per ogni tale retta r mostrare che esiste un unico spazio S_r di dimensione 3 contenente r e che sia "non generante" con entrambi i piani (cioè $S_r \vee \pi \neq \mathbb{A}^5(\mathbb{Q}) \neq S_r \vee \sigma$);

(2) Mostrare che $S_r \vee \pi = r \vee \pi$ e $S_r \vee \sigma = r \vee \sigma$; determinare le possibili posizioni reciproche di S_r con π e con σ.

(3) Determinare i casi possibili per le intersezioni $S_r \wedge \pi$ e $S_r \wedge \sigma$, e dire se queste determinano lo spazio S_r.

[*Suggerimento: eventualmente scegliere un riferimento affine in cui i due piani abbiano espressione semplice, ma si può anche risolvere l'esercizio in modo astratto (preferibile).*]

... versione facilitata *(e approfondimenti in italico)* **...**

Testo del compito:

Esercizio 1. In $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ dotato del riferimento ortogonale canonico, sono date le rette $r = O + \langle e_1 \rangle$ e $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

(1) determinare posizioni reciproche, distanza e angolo tra r ed s;
(2) sia Γ l'insieme delle isometrie ϕ di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ che fissano puntualmente r; scrivere le matrici di tali isometrie;
(3) per ogni isometria $\phi \in \Gamma$, calcolare l'immagine $\phi(s)$ di s tramite ϕ;
(4) per ogni isometria $\phi \in \Gamma$, calcolare posizioni reciproche, distanza e angolo tra s e $\phi(s)$;
(5) descrivere con una equazione cartesiana l'insieme formato dalla unione insiemistica delle rette $\phi(s)$ al variare di $\phi \in \Gamma$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ dotato del riferimento canonico, consideriamo i sottospazi

$$\pi = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \quad , \quad r = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle.$$

(1) Determinare le posizioni reciproche di π ed r come sottospazi affini, determinare la distanza tra π ed r e i punti di minima distanza.
(2) Determinare la proiezione ortogonale r' della retta r sul piano π, e l'angolo θ tra r ed r';
(3) mostrare che l'angolo calcolato nel punto precedente dipende solo da retta e piano e non da altre scelte;
(4) dati una retta r e un piano π in $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$, mostrare che la distanza e l'angolo tra r e π determinano la loro posizione reciproca affine;
(5) dati una retta r e un piano π in $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$, mostrare che la distanza e l'angolo tra r e π determinano la loro posizione reciproca a meno di isometrie, cioè che esiste un isometria che manda r in r' e π in π' se e solo se $d(r, \pi) = d(r', \pi')$ e $\theta(r, \pi) = \theta(r', \pi')$.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$, sono dati due piani π, σ sghembi tra loro.

(1) scegliendo un punto non appartenente all'unione dei due piani e un vettore opportuno, mostrare che esistono rette sghembe sia con π che con σ; *delle rette per un fissato punto, quali sono sghembe con entrambi i piani, quali con uno, e quali con nessuno?*
(2) per ogni retta r sghemba sia con π che con σ, si calcoli la dimensione degli spazi $r \vee \pi$ e $r \vee \sigma$;
(3) si ponga $S_r = (r \vee \pi) \wedge (r \vee \sigma)$ e si calcoli la dimensione di S_r;
(4) si calcolino le dimensioni di $S_r \vee \pi$ e $S_r \vee \sigma$, e si dimostri che $S_r \vee \pi = r \vee \pi$ e $S_r \vee \sigma = r \vee \sigma$;
(5) si mostri che S_r contiene r ed è "non generante" sia con π che con σ, ed è l'unico spazio di dimensione 3 con queste proprietà;
(6) tenendo conto che S_r è iperpiano di $r \vee \pi$, mostrare che o π è parallelo a S_r oppure lo interseca in una retta; idem per σ, ma π e σ non possono essere entrambi paralleli a S_r;
(7) mostrare che conoscere le intersezioni di π e σ con S_r determina lo spazio S_r.
(8) *ci si poteva chiedere anche che relazioni reciproche vi sono tra gli spazi S_r per diverse rette (a seconda della posizione delle rette...), per esempio quali rette r hanno lo stesso spazio S_r?*

Ppp-G1B-2022-3
martedì 25 aprile 2023 07:39

① Possiamo supporre $r = O + \langle e_1 \rangle$,
che $h =$ retta di minima distanza sia $O + \langle e_3 \rangle$,
quindi $s = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\d\end{pmatrix}}_{\in h} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix}}_{\perp h} \rangle$ con $\alpha \neq 0$ (altrimenti $s \perp r$ ...)
e $\alpha^2+\beta^2=1$ volendo... e allora $\alpha = \cos\vartheta(r,s)$

Allora $\Gamma = R \sqcup R'$ (unione disgiunta)
con $R = \left\{ \phi \text{ con matrice } \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&-s\\0&0&s&c\end{pmatrix} \right\}$ det=1
$R' = \left\{ \phi \text{ con matrice } \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&s\\0&0&s&-c\end{pmatrix} \right\}$ det=-1
dove $c = \cos\vartheta$
$s = \sin\vartheta$ al variare di ϑ.

Quindi $\phi(s) = \phi\begin{pmatrix}0\\0\\d\end{pmatrix} + \langle F\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix} \rangle = \begin{cases} \begin{pmatrix}0\\-ds\\dc\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}\alpha\\\beta c\\\beta s\end{pmatrix} \rangle & \text{per } \phi\in R \\ \begin{pmatrix}0\\ds\\-dc\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}\alpha\\\beta c\\\beta s\end{pmatrix} \rangle & \text{per } \phi\in R' \end{cases}$

Vediamo le posizioni reciproche di s, $\phi(s)$:
se $\phi \in R$:

$$\begin{vmatrix}0&\alpha&\alpha\\ds&\beta&\beta c\\d-dc&0&\beta s\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&\alpha&0\\ds&\beta&\beta(c-1)\\d(1-c)&0&\beta s\end{vmatrix} = \alpha\beta d\left(s^2+(1-c)^2\right) = 2\alpha\beta d(1-c)$$

si annulla solo se $\beta=0$ ($r /\!/ s$ e allora $s /\!/ \phi(s)$)
o se $c=1$ (cioè $\phi = id$)
altrimenti sono sghembe!

$|P-\phi(P)\ \sigma\ F\sigma|$

se $\phi \in R'$:

$$\begin{vmatrix}0&\alpha&\alpha\\-ds&\beta&\beta c\\d+dc&0&\beta s\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&\alpha&0\\-ds&\beta&\beta(c-1)\\d(1+c)&0&\beta s\end{vmatrix} = \alpha\beta d\left(-s^2-c^2+1\right) \equiv 0$$

dunque sono sempre incidenti
(oppure parallele se $\beta=0$), mai sghembe

In generale: se $\beta=0$ abbiamo $\phi(s) /\!/ s$
se $\beta\neq0$ abbiamo $\phi(s), \psi(s)$ $\begin{cases}\text{sghembi } \phi,\psi\in R \\ \quad \text{o } \phi,\psi\in R' \\ \text{incidenti se } \phi\in R, \psi\in R' \\ \quad \text{o viceversa}\end{cases}$

Distanza ed angolo tra s e $\phi(s)$:
se $\phi \in R$ abbiamo

$$d(s,\phi(s)) = \frac{|\det \text{di prima}|}{\left\| \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\alpha\\\beta c\\\beta s\end{pmatrix} \right\|} = \frac{2\alpha\beta d(1-c)}{\left\| \begin{pmatrix}\beta^2 s\\-\alpha\beta s\\\alpha\beta(c-1)\end{pmatrix} \right\|} = \frac{2\alpha\beta d(1-c)}{\beta\sqrt{\underbrace{s^2+\alpha^2(c-1)^2}_{(1-c)(1+c-\alpha^2(1-c))}}} = 2\alpha d\frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{1-\alpha^2+c(1+\alpha^2)}}$$

($s^2 = 1-c^2$; $1+c-\alpha^2(1-c) = 1-\alpha^2+c(1+\alpha^2)$)

$$\cos\vartheta(s,\phi(s)) = \frac{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\\beta c\\\beta s\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix}\alpha\\\beta c\\\beta s\end{pmatrix}\right\|} = \frac{\alpha^2+\beta^2 c}{\alpha^2+\beta^2} = \alpha^2+\beta^2 c$$

se $\phi \in R'$ abbiamo $d(s,\phi(s)) = 0$ (sono incidenti)
e angolo come prima!

<u>Nota</u>: abbiamo trascurato il caso $r /\!/ s$ (allora $s /\!/ \phi(s)$, angolo è sempre nullo, e la distanza si misura "sul piano $\perp r$")
<u>e</u>: in generale i punti di minima distanza di s e $\phi(s)$ <u>non</u> sono nel piano per O e $\perp r$!

$\bigcup_{\phi\in\Gamma} \phi(s) = \bigcup_{\phi\in R} \phi(s)$ perché ogni punto delle $\phi(s)$ con $\phi\in R'$ è già anche in qualche $\phi(s)$ con $\phi\in R$ ...

e basta eliminare i parametri t e ϑ da

$\phi\begin{pmatrix}0\\0\\d\end{pmatrix} + \langle F\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix}\rangle = \begin{pmatrix}0\\-ds\\dc\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}\alpha\\\beta c\\\beta s\end{pmatrix}\rangle$

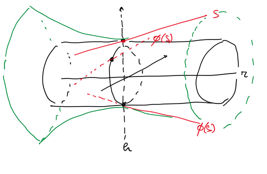
$$\begin{cases} X = \alpha t \\ Y = -d\sin\vartheta + t\beta\cos\vartheta \\ Z = d\cos\vartheta + t\beta\sin\vartheta \end{cases} \leadsto t = \frac{X}{\alpha}$$

$$\begin{cases} Y = -d\sin\vartheta + \frac{X}{\alpha}\beta\cos\vartheta \\ Z = d\cos\vartheta + \frac{X}{\alpha}\beta\sin\vartheta \end{cases}$$

e sommando i quadrati:

$$Y^2+Z^2 = d^2 + X^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$$

<u>Nota</u>: se $\beta=0$ ($r /\!/ s$) viene un <u>cilindro</u> retto di asse r, <u>altrimenti no</u> (le rette s, $\phi(s)$ sono tangenti a quel cilindro...)



② $\pi = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$, $r = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \rangle$

$\begin{vmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\end{vmatrix} = -1 \neq 0$ dunque r,π sono SGHEMBI e $d(\pi,r) = \dfrac{|\det.\text{prima}|}{\sqrt{\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{vmatrix}}} = \dfrac{1}{\sqrt2} = \dfrac{\sqrt2}{2}$

matrice Gram dei generatori

$\pi \ni P = \begin{pmatrix}1+\alpha\\1+\beta\\\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, $r \ni R = \begin{pmatrix}\gamma\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$P-R \perp \pi, r \iff \begin{pmatrix}1+\alpha-\gamma\\\beta\\\alpha-1\\\beta-1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} 1+\alpha-\gamma=0 \\ \alpha-1=0 \\ 2\beta-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=1/2 \\ \gamma=2 \end{cases}$

dunque $P_0 = \begin{pmatrix}2\\3/2\\1\\1/2\end{pmatrix}$, $R_0 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $d(\pi,r) = \|P_0-R_0\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}\right\| = \frac{\sqrt2}{2}$

$r' =$ proiezione ortogonale di r su π passa per P_0
con vettore direttore v: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = v + v'$ con $v /\!/ \pi$, $v' \perp \pi$
e si trova $v = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$,
dunque $\vartheta(r,r')$ ha coseno $\dfrac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{1}{\sqrt2} = \dfrac{\sqrt2}{2}$

e questo angolo dipende solo da r e π, non dai generatori usati per il calcolo.
<u>Nota</u>: in generale sappiamo sempre definire l'angolo tra una RETTA e un SOTTOSPAZIO qualsiasi usando la proiezione ortogonale della retta...

Distanza ed angolo determinano le posizioni affini:

$$d = \begin{cases} 0 \to \text{incidenti}, \text{ angolo} \begin{cases} =0 & r \subseteq \pi \\ \neq 0 & r \cap \pi = \text{punto} \end{cases} \\ \neq 0 \to \text{non incidenti}, \text{ angolo} \begin{cases} =0 & r /\!/ \pi \text{ non } \subseteq \\ \neq 0 & r,\pi \text{ sghembi} \end{cases} \end{cases}$$

<u>Nota</u>: una retta può essere solo inclusa/incid/paral/sghemba con altri sottospazi.

Distanza ed angolo sono invarianti della posizione euclidea:
dati r,π ed r',π', esiste ISOMETRIA ϕ t.c.
$\phi(r) = r'$, $\phi(\pi) = \pi'$ <u>sse</u> $d(r,\pi) = d(r',\pi')$
$\vartheta(r,\pi) = \vartheta(r',\pi')$
infatti basta vedere che con isometrie si portano nella situazione standard $\pi = O + \langle e_1, e_2 \rangle$
$r = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\d\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\\cos\vartheta\\\sin\vartheta\\0\end{pmatrix} \rangle$
(retta minima distanza $h = O + \langle e_4 \rangle$...)

③ $\underset{P+V_\pi}{\pi}, \underset{Q+V_\sigma}{\sigma}$ piani $\subseteq \mathbb{A}^5(K)$ sghembi tra loro: $\pi\wedge\sigma = \emptyset$
$\pi\vee\sigma = \mathbb{A}^5$

Esistono rette che sono sghembe con entrambi:
basta $r = R + \langle v \rangle$ con $R \notin \pi\cup\sigma$ (unione insiemistica $\neq \mathbb{A}^5$)
$v \notin V_\pi$, $v \notin V_\sigma$ ($V_\pi \cup V_\sigma \neq K^5$ ...)
$R-P \notin \langle v \rangle + V_\pi$ (basta
$R-Q \notin \langle v \rangle + V_\sigma$ $R \notin P + (\langle v \rangle + V_\pi)$
$\notin Q + (\langle v \rangle + V_\sigma)$
che sono 2 spazi 3-dim
la cui unione <u>non</u> è $\mathbb{A}^5$)

Se r è retta sghemba con π e con σ,
allora $\dim(r\vee\pi) = 1+2-(-1) = 4$
$\dim(r\vee\sigma) = 1+2-(-1) = 4$
e allora prendendo $S_r := (r\vee\pi)\wedge(r\vee\sigma)$ otteniamo:
S_r contiene r
$S_r \leq (r\vee\pi) \Rightarrow S_r\vee\pi \leq (r\vee\pi)\vee\pi = \overset{\dim 4}{r\vee\pi} \neq \mathbb{A}^5$
$S_r \leq (r\vee\sigma) \Rightarrow S_r\vee\sigma \leq (r\vee\sigma)\vee\sigma = r\vee\sigma \neq \mathbb{A}^5$
$\dim S_r \underset{\text{uso = perché } r\vee\pi \text{ e } r\vee\sigma \text{ si intersecano (contengono almeno } r\text{...)}}{=} 4+4-5 = 3$

D'altra parte un S_r con tali proprietà deve essere $\leq r\vee\pi$, $\leq r\vee\sigma$,
quindi è l'unico!
Inoltre otteniamo $S_r\vee\pi \leq r\vee\pi$, ma dim $4=4$, dunque $=$
idem $S_r\vee\sigma \leq r\vee\sigma$, ...

Ora S_r, π sono contenuti in $r\vee\pi$
quindi S_r è iperpiano di $r\vee\pi$ (dim 3 dentro a dim 4)
dunque è o parallelo o incidente con π
se incidente $\dim(S_r\wedge\pi) = 3+2-4 = 1$ (retta!)
idem per S_r, σ,
ma π e σ non possono essere entrambi paralleli a S_r, perché sono sghembi tra loro!

Conclusione:
- $\pi /\!/ S_r$, $\sigma\cap S_r = $ retta $\Rightarrow S_r = $ spazio 2 rette e $/\!/ \pi$
- $\pi\cap S_r = $ retta, $\sigma /\!/ S_r$ $\Rightarrow S_r = $ spazio 2 rette e $/\!/ \sigma$
- $\pi\cap S_r = $ retta, $\sigma\cap S_r = $ retta' $\Rightarrow$ sono rette sghembe (π e σ lo sono!) e $S_r = $ retta $\vee$ retta'

(quindi S_r è determinato dalle sue intersezioni con π, σ).

Testo del compito:

Esercizio 1.

(1) Sono dati tre punti A, B, C in posizione generale in un piano proiettivo, e sui tre lati a, b, c sono date delle coppie di punti rispettivamente A', A'', B', B'', C', C'' che siano separatori armonici dei vertici. Mostrare che A', B', C' sono allineati se e solo se le rette AA'', BB'', CC'' sono concorrenti in un punto. Dualizzare l'enunciato. Quali risultati di geometria affine e/o conforme si possono dedurre da questi enunciati?

(2) Sono dati quattro punti A, B, C, D in posizione generale in uno spazio proiettivo di dimensione 3, e sui quattro lati AB, BC, CD, DA sono date delle coppie di punti rispettivamente A' e A'', B' e B'', C' e C'', D' e D'' che siano separatori armonici dei vertici. Mostrare che A', B', C', D' sono complanari se e solo se A'', B'', C'', D'' sono complanari se e solo se i piani CDA'', ADB'', ABC'', BCD'' sono concorrenti in un punto. Dualizzare l'enunciato. Quali risultati di geometria affine e/o conforme si possono dedurre da questi enunciati?

Esercizio 2. Sono dati due triangoli di vertici A, B, C e A', B', C' in un piano proiettivo, prospettivi dallo stesso punto O, senza vertici né lati comuni. Sia r la retta di omologia e siano $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ le intersezioni di r con i raggi OA, OB, OC rispettivamente. Su ogni raggio OA, OB, OC siano A_1, B_1, C_1 le intersezioni con i lati a, b, c rispettivamente, e siano A'_1, B'_1, C'_1 le intersezioni con i lati a', b', c' rispettivamente. Scelto un opportuno sistema di riferimento proiettivo:

(1) Determinare i birapporti $(O\ X\ X'\ \tilde{X})$ per $X \in \{A, B, C\}$, e giustificare perché risultano uguali;

(2) Determinare i birapporti $(O\ X\ X'\ X_1)$ e $(O\ X'\ X\ X'_1)$ per $X \in \{A, B, C\}$, e determinare in quali casi non sono tutti distinti;

(3) Trovare condizioni necessarie e sufficienti in termini dei birapporti del punto (2) affinché i birapporti del punto (1) risultino armonici,

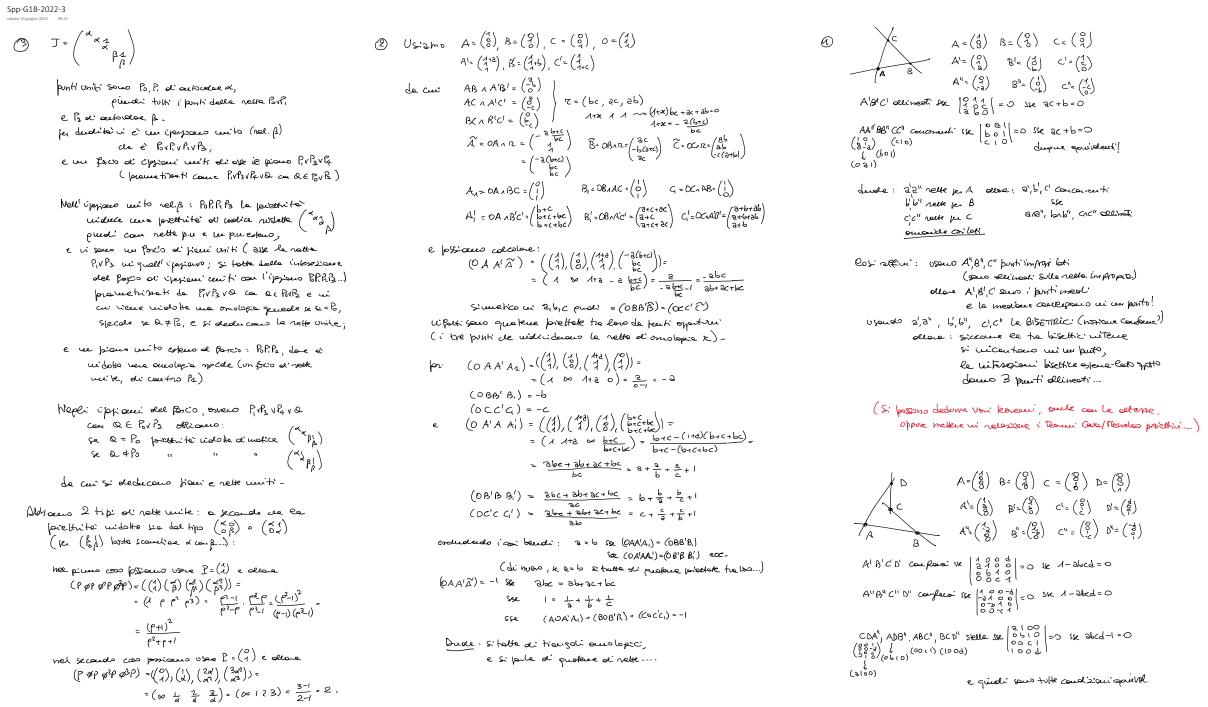
(4) Dualizzare gli enunciati precedenti.

Esercizio 3. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha un piano e una retta uniti sghembi tra loro. Il piano unito contiene esattamente una retta di punti uniti, la retta unita contiene un solo punto unito e non vi sono altri punti uniti.

(1) Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività,

(2) e determinare la configurazione di punti, iperpiani, rette e piani uniti.

(3) Per ogni retta unita, sia P un punto non unito; determinare il birapporto $(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^3 P)$. Spiegare perché il risultato è indipendente dal punto P scelto.



Spp-G1B-2022-3
sabato 10 giugno 2023 08:31

③ $J = \begin{pmatrix}\alpha&&&&\\&\alpha&1&&\\&&\alpha&&\\&&&\beta&1\\&&&&\beta\end{pmatrix}$

punti uniti sono P_0, P_1 di autovalore α,
quindi tutti i punti della retta $P_0 \vee P_1$
e P_3 di autovalore β.
per dualità vi è un iperpiano unito (rel. β)
che è $P_0 \vee P_1 \vee P_2 \vee P_3$,
e un fascio di iperpiani uniti di asse il piano $P_1 \vee P_3 \vee P_4$
(parametrizzati come $P_1 \vee P_3 \vee P_4 \vee Q$ con $Q \in P_0 \vee P_2$)

Nell'iperpiano unito rel. β: $P_0P_1P_2P_3$ la proiettività induce una proiettività di matrice ridotta $\begin{pmatrix}\alpha&&&\\&\alpha&1&\\&&\alpha&\\&&&\beta\end{pmatrix}$
quindi con retta p.u. e un p.u. esterno,
e vi sono un fascio di piani uniti (asse la retta $P_1 \vee P_3$ in quell'iperpiano; si tratta della intersezione del fascio di iperpiani uniti con l'iperpiano $P_0P_1P_2P_3$...) parametrizzati da $P_1 \vee P_3 \vee Q$ con $Q \in P_0 \vee P_2$ e in cui viene indotta una omologia generale se $Q = P_0$, speciale se $Q \neq P_0$, e si deducono le rette unite;

e un piano unito esterno al fascio: $P_0P_1P_2$, dove è indotta una omologia speciale (un fascio di rette unite, di centro P_1)

Negli iperpiani del fascio, ovvero $P_1 \vee P_3 \vee P_4 \vee Q$
con $Q \in P_0 \vee P_2$ otteniamo:
se $Q = P_0$ proiettività indotta di matrice $\begin{pmatrix}\alpha&&&\\&\alpha&&\\&&\beta&1\\&&&\beta\end{pmatrix}$
se $Q \neq P_0$ " " " $\begin{pmatrix}\alpha&1&&\\&\alpha&&\\&&\beta&1\\&&&\beta\end{pmatrix}$

da cui si deducono piani e rette uniti.

Abbiamo 2 tipi di rette unite: a seconda che la proiettività indotta sia del tipo $\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$
(per $\begin{pmatrix}\beta&1\\0&\beta\end{pmatrix}$ basta scambiare α con β...):

nel primo caso possiamo usare $P = \binom{1}{1}$ e allora
$$(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^3 P) = \left(\binom{1}{1}\binom{\alpha}{\beta}\binom{\alpha^2}{\beta^2}\binom{\alpha^3}{\beta^3}\right) = (1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3) = \frac{\rho^2-1}{\rho^2-\rho}\cdot\frac{\rho^3-\rho}{\rho^3-1} = \frac{(\rho^2-1)^2}{(\rho-1)(\rho^3-1)} = \frac{(\rho+1)^2}{\rho^2+\rho+1}$$

nel secondo caso possiamo usare $P = \binom{0}{1}$ e allora
$$(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^3 P) = \left(\binom{0}{1},\binom{1}{\alpha},\binom{2\alpha}{\alpha^2},\binom{3\alpha^2}{\alpha^3}\right) = \left(\infty\ \tfrac{1}{\alpha}\ \tfrac{2}{\alpha}\ \tfrac{3}{\alpha}\right) = (\infty\ 1\ 2\ 3) = \frac{3-1}{2-1} = 2.$$

② Usiamo $A = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
$A' = \begin{pmatrix}1+a\\1\\1\end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix}1\\1+b\\1\end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix}1\\1\\1+c\end{pmatrix}$

da cui
$$\left.\begin{aligned} AB \wedge A'B' &= \begin{pmatrix}a\\-b\\0\end{pmatrix}\\ AC \wedge A'C' &= \begin{pmatrix}a\\0\\-c\end{pmatrix}\\ BC \wedge B'C' &= \begin{pmatrix}0\\b\\-c\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\ r = (bc, ac, ab)$$
$1+x\ 1\ 1 \rightsquigarrow (1+x)bc + ac + ab = 0$
$1+x = -\frac{a(b+c)}{bc}$

$\tilde{A} = OA \wedge r = \begin{pmatrix}-a\frac{b+c}{bc}\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a(b+c)\\bc\\bc\end{pmatrix}$ $\tilde{B} = OB \wedge r = \begin{pmatrix}ac\\-b(a+c)\\ac\end{pmatrix}$ $\tilde{C} = OC \wedge r = \begin{pmatrix}ab\\ab\\-c(a+b)\end{pmatrix}$

$A_1 = OA \wedge BC = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $B_1 = OB \wedge AC = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $C_1 = OC \wedge AB = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$A_1' = OA \wedge B'C' = \begin{pmatrix}b+c\\b+c+bc\\b+c+bc\end{pmatrix}$ $B_1' = OB \wedge A'C' = \begin{pmatrix}a+c+ac\\a+c\\a+c+ac\end{pmatrix}$ $C_1' = OC \wedge A'B' = \begin{pmatrix}a+b+ab\\a+b+ab\\a+b\end{pmatrix}$

e possiamo calcolare:
$$(O\,A\,A'\,\tilde{A}) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+a\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-a(b+c)\\bc\\bc\end{pmatrix}\right) = \left(1\ \infty\ 1+a\ -a\tfrac{b+c}{bc}\right) = \frac{a}{-a\frac{b+c}{bc}-1} = \frac{-abc}{ab+ac+bc}$$

simmetrico in a, b, c quindi $= (OBB'\tilde{B}) = (OCC'\tilde{C})$
infatti sono quaterne proiettate tra loro da punti opportuni (i tre punti che individuano la retta di omologia r).

poi $(O\,A\,A'\,A_1) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+a\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = (1\ \infty\ 1+a\ 0) = \frac{a}{0-1} = -a$
$(OBB'B_1) = -b$
$(OCC'C_1) = -c$
e $(O\,A'\,A\,A_1') = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+a\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b+c\\b+c+bc\\b+c+bc\end{pmatrix}\right) = \left(1\ 1+a\ \infty\ \frac{b+c}{b+c+bc}\right) = \frac{b+c-(1+a)(b+c+bc)}{b+c-(b+c+bc)} =$
$= \frac{abc+ab+ac+bc}{bc} = a + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + 1$

$(OB'BB_1') = \frac{abc+ab+ac+bc}{ac} = b + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1$
$(OC'CC_1') = \frac{abc+ab+ac+bc}{ab} = c + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$

escludendo i casi banali: $a = b$ sse $(OAA'A_1) = (OBB'B_1)$
sse $(OA'AA_1') = (OB'BB_1')$ ecc.
(di nuovo, se $a = b$ si tratta di quaterne proiettate tra loro...)
$(OAA'\tilde{A}) = -1$ sse $abc = ab + ac + bc$
sse $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
sse $(AOA'A_1) + (BOB'B_1) + (COC'C_1) = -1$

Duale: si tratta di triangoli omologici, e si parla di quaterne di rette....

① $A = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
$A' = \begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}$ $B' = \begin{pmatrix}1\\0\\b\end{pmatrix}$ $C' = \begin{pmatrix}1\\c\\0\end{pmatrix}$
$A'' = \begin{pmatrix}0\\1\\-a\end{pmatrix}$ $B'' = \begin{pmatrix}1\\0\\-b\end{pmatrix}$ $C'' = \begin{pmatrix}1\\-c\\0\end{pmatrix}$

$A'B'C'$ allineati sse $\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&c\\a&b&0\end{vmatrix} = 0$ sse $ac + b = 0$

$AA''\,BB''\,CC''$ concorrenti sse $\begin{vmatrix}0&a&1\\b&0&1\\c&1&0\end{vmatrix} = 0$ sse $ac + b = 0$
$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&-a\end{pmatrix}$ $(c\,1\,0)$ $(b\,0\,1)$ $(0\,a\,1)$
dunque equivalenti!

duale: $a'a''$ rette per A, $b'b''$ rette per B, $c'c''$ rette per C armoniche coi lati
allora: a', b', c' concorrenti sse $a \wedge a'', b \wedge b'', c \wedge c''$ allineati

Così affini: usando A'', B'', C'' punti impropri lati (sono allineati sulla retta impropria)
allora A', B', C' sono i punti medi
e le mediane concorrono in un punto!
usando a', a'', b', b'', c', c'' le BISETTRICI (nozione conforme?)
allora: siccome le tre bisettrici interne si incontrano in un punto,
le intersezioni bisettrice esterna-lato opposto danno 3 punti allineati...

(Si possono dedurre vari teoremi, anche con le altezze, oppure mettere in relazione i teoremi Ceva/Menelao proiettivi...)

$A = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$
$A' = \begin{pmatrix}1\\a\\0\\0\end{pmatrix}$ $B' = \begin{pmatrix}0\\1\\b\\0\end{pmatrix}$ $C' = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\c\end{pmatrix}$ $D' = \begin{pmatrix}d\\0\\0\\1\end{pmatrix}$
$A'' = \begin{pmatrix}1\\-a\\0\\0\end{pmatrix}$ $B'' = \begin{pmatrix}0\\1\\-b\\0\end{pmatrix}$ $C'' = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-c\end{pmatrix}$ $D'' = \begin{pmatrix}-d\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$A'B'C'D'$ complanari sse $\begin{vmatrix}1&0&0&d\\a&1&0&0\\0&b&1&0\\0&0&c&1\end{vmatrix} = 0$ sse $1 - abcd = 0$
$A''B''C''D''$ complanari sse $\begin{vmatrix}1&0&0&-d\\-a&1&0&0\\0&-b&1&0\\0&0&-c&1\end{vmatrix} = 0$ sse $1 - abcd = 0$

CDA'', ADB'', ABC'', BCD'' stelle sse $\begin{vmatrix}a&1&0&0\\0&b&1&0\\0&0&c&1\\1&0&0&d\end{vmatrix} = 0$ sse $abcd - 1 = 0$
[illegible] $(0\,b\,1\,0)$ $(0\,0\,c\,1)$ $(1\,0\,0\,d)$ $(a\,1\,0\,0)$

e quindi sono tutte condizioni equivalenti.

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t non appartenente ad $r \cup s$, si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati due piani:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad \sigma = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza, l'angolo tra loro (spiegare).

Si determinino, se esistono, tutte le isometrie ϕ tali che $\phi(\pi) = \pi$ e $\phi(\sigma) = \sigma$.

Esercizio 3. In uno spazio proiettivo di dimensione 3 sono date tre rette r_0, r_1, r_2 due a due sghembe, e tre rette trasversali comuni s_0, s_1, s_2 distinte. Siano $A_{ij} = r_i \wedge s_j$, per $i, j = 0, 1, 2$ i nove punti di intersezione.

Per punti $R_i \in r_i$, per $i = 0, 1, 2$: mostrare che essi sono allineati se e solo se i tre birapporti $(A_{i0}\ A_{i1}\ A_{i2}\ R_i)$ coincidono per $i = 0, 1, 2$.

Definiamo $\mathcal{S}$ l'insieme delle rette trasversali comuni a r_0, r_1, r_2. Mostrare che le rette di $\mathcal{S}$ sono del tipo $R_0 \vee R_1$ dove $R_0 \in r_0$, $R_1 \in r_1$ sono tali che $(A_{00}\ A_{01}\ A_{02}\ R_0) = (A_{10}\ A_{11}\ A_{12}\ R_1)$.

Definiamo $\mathcal{R}$ l'insieme delle rette trasversali comuni a s_0, s_1, s_2. Mostrare che ogni retta di $\mathcal{S}$ interseca ogni retta di $\mathcal{R}$ ma che due rette in $\mathcal{S}$ (o in $\mathcal{R}$) sono sempre sghembe.

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti tutti e soli quelli di due rette sghembe tra loro. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, siano P, Q due punti non uniti; determinare il birapporto $(P\ \phi P\ Q\ \phi Q)$. Vi sono coppie di punti su quella retta tali che questo birapporto risulta armonico?

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t non appartenente ad $r \cup s$, si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva tramite equazioni cartesiane l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati due sottospazi:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza, l'angolo tra loro (spiegare).

Esistono isometrie ϕ di $\mathbb{E}^4$ tali che $\phi(r) \subseteq \pi$ e $\phi(\pi) \supseteq r$?

Esercizio 3. In uno spazio proiettivo di dimensione 3 sono dati quattro punti P_0, P_1, P_2, P_3 in posizione generale, siano π_i i piani generati dai punti P_j con $j \neq i$, e un punto O non appartenente ai piani π_i. Definiamo P_i' per $i = 0, 1, 2, 3$ i punti di intersezione di $O \vee P_i$ con π_i, e π_i' i piani generati dai punti P_j' con $j \neq i$.

Per punti $Q_i \in O \vee P_i$, per $i = 0, 1, 2, 3$: mostrare che essi sono complanari se e solo se i quattro birapporti $(O\ P_i\ P_i'\ Q_i)$ hanno somma 1.

Mostrare che le rette date dalle intersezioni $\pi_i \wedge \pi_i'$ per $i = 0, 1, 2, 3$ sono complanari, e siano S_i i punti di intersezione di tale piano con le rette $O \vee P_i$; determinare i birapporti $(O\ P_i\ P_i'\ S_i)$.

Dualizzare costruzione e risultati precedenti.

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti tutti e soli quelli di una retta e un piano sghembi tra loro. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, siano P un punto unito e Q punto non unito; determinare il birapporto $(P\ Q\ \phi Q\ \phi^2 Q)$. Vi sono casi in cui questo birapporto risulta armonico?

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t non appartenente ad $r \cup s$, si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva tramite equazioni cartesiane l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati due sottospazi affini:

$$\pi = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle \quad , \quad \sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, inf e sup dei due sottospazi, l'angolo tra loro (spiegare).

Determinare tutte le isometrie ϕ di $\mathbb{E}^4$ tali che $\phi(\pi) = \sigma$. Quali sono le immagini di σ per tali isometrie?

Esercizio 3. In un piano proiettivo sono dati tre punti P_0, P_1, P_2 in posizione generale, siano r_i le rette generate dai punti P_j con $j \neq i$, e un punto O non appartenente alle rette r_i. Definiamo P'_i per $i = 0, 1, 2$ i punti di intersezione di $O \vee P_i$ con r_i; siano r'_i le rette generate dai punti P'_j con $j \neq i$.

Per punti $Q_i \in O \vee P_i$, per $i = 0, 1, 2$: mostrare che essi sono allineati se e solo se i tre birapporti $(O\ P_i\ P'_i\ Q_i)$ hanno somma 1.

Mostrare che i punti dati dalle intersezioni $r_i \wedge r'_i$ per $i = 0, 1, 2$ sono allineati, e siano S_i i punti di intersezione di tale retta con le rette $O \vee P_i$; determinare i birapporti $(O\ P_i\ P'_i\ S_i)$.

Dualizzare costruzione e risultati precedenti.

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha solo due punti uniti. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, sia P un punto non unito; determinare il birapporto $(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^3 P)$. Vi sono casi in cui questo birapporto risulta armonico?

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t non appartenente ad $r \cup s$, si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva tramite equazioni cartesiane l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati due sottospazi affini:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, inf e sup dei due sottospazi, l'angolo tra loro (spiegare).

Determinare tutte le isometrie ϕ di $\mathbb{E}^4$ tali che $\phi(\pi) = \sigma$. Quali sono le immagini di σ per tali isometrie?

Esercizio 3. In uno spazio proiettivo di dimensione 3 sono dati quattro punti P_0, P_1, P_2, P_3 in posizione generale, siano π_i i piani generati dai punti P_j con $j \neq i$, e un punto O non appartenente ai piani π_i. Siano P'_i per $i = 0, 1, 2, 3$ punti sulle rette $O \vee P_i$ distinti da quelli già dati e π'_i i piani generati dai punti P'_j con $j \neq i$.

Mostrare che le rette date dalle intersezioni $\pi_i \wedge \pi'_i$ per $i = 0, 1, 2, 3$ sono complanari, sia σ tale piano.

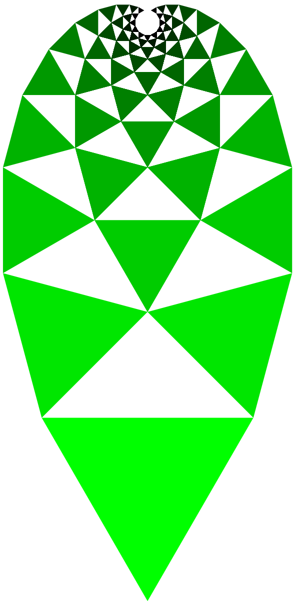
Siano S_i i punti di intersezione del piano σ con le rette $O \vee P_i$; mostrare che i birapporti $(O\ P_i\ P'_i\ S_i)$ sono tutti uguali per $i = 0, 1, 2, 3$.

Dualizzare costruzione e risultati precedenti.

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti esattamente quelli di una retta. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, siano P, Q due punti non uniti; determinare il birapporto $(P\ \phi P\ Q\ \phi Q)$.

da venire...



UNIVERSITAS · STUDII PADUANI ·

MCCXXII