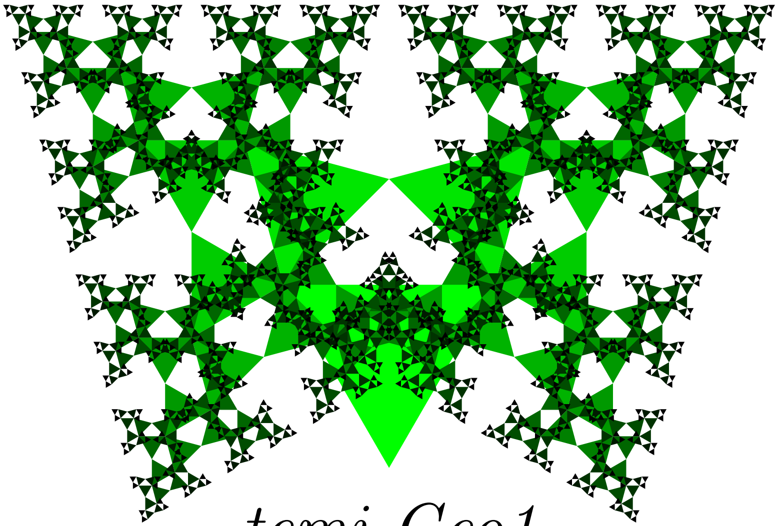
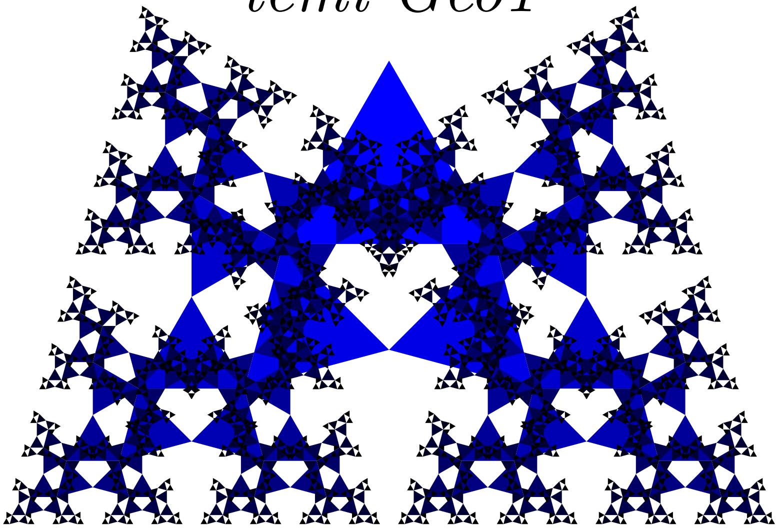
Raccolta esami a.a. 2020/21/22

Geometria 1A (Algebra Lineare)
Geometria 1 B (Geometria Affine, Euclidea, Hermitiana, Proiettiva)



temi Geo1



Università di Padova **Dip.Matem.**

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale e trigonometrica le radici cubiche del numero complesso i. Determinare le equazioni hermitiane delle tre rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle tre circonferenze ottenute invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale e trigonometrica le radici cubiche del numero complesso $-i$. Determinare le equazioni hermitiane delle tre rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle tre circonferenze ottenute invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U = \langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_2 + e_3 + e_4 \rangle \qquad \text{e} \qquad V : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ 2X_2 - X_4 = 0 \end{cases}$$

Trovare equazioni cartesiane per U e una base per V. Dimostrare che sono in somma diretta e calcolare la proiezione su U nella direzione V e la simmetria di asse V e direzione U, scrivendone le matrici in base canonica.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U : \begin{cases} X_2 - X_3 = 0 \\ 2X_2 - X_3 - X_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad V = \langle e_1 + e_2 + 2e_3 + 2e_4, e_2 + e_3 + 2e_4 \rangle$$

Trovare equazioni cartesiane per V e una base per U. Dimostrare che sono in somma diretta e calcolare la proiezione su U nella direzione V e la simmetria di asse V e direzione U, scrivendone le matrici in base canonica.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $K^4 \to K^2$ di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ nelle basi canoniche. Determinare nucleo e immagine. Determinare tutte le possibili inverse destre/sinistre/bilatere. Determinare tutte le funzioni lineari che composte a destra/sinistra danno la funzione nulla.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $K^2 \to K^4$ di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ nelle basi canoniche. Determinare nucleo e immagine. Determinare tutte le possibili inverse destre/sinistre/bilatere. Determinare tutte le funzioni lineari che composte a destra/sinistra danno la funzione nulla.

Esercizio 4. Si consideri un triangolo di vertici $A, B, C \in \mathbb{C}$. Mostrare che esso è isoscele in A se e solo se esiste un numero complesso unitario α diverso da ± 1 tale che $A = \frac{1}{1+\alpha}B + \frac{1}{1+\bar{\alpha}}C$. Che relazioni vi sono tra α e gli angoli del triangolo? Per quali valori di α il triangolo è rettangolo?

Esercizio 4. Si consideri un triangolo di vertici $A, B, C \in \mathbb{C}$. Mostrare che esso è rettangolo in A se e solo se esiste un numero complesso unitario α diverso da ± 1 tale che $2A = (1 - \alpha)B + (1 + \alpha)C$. Che relazioni vi sono tra α e gli angoli del triangolo? Per quali valori di α il triangolo è isoscele?

Testo del compito:

Esercizio 1. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine n)

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} e_{in} + \sum_{i=1}^{n-1} e_{ni} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & x_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x_n \end{pmatrix}$$

(tutte le entrate non scritte sono nulle) e discutere la diagonalizzabilità della matrice $B_n = \sum_{i=1}^{n-1} e_{in} + \sum_{i=1}^{n-1} e_{ni}$.

Esercizio 1. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine n)

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_{ii} + \sum_{i=2}^{n} e_{i1} + \sum_{i=2}^{n} e_{1i} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & x_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}$$

(tutte le entrate non scritte sono nulle) e discutere la diagonalizzabilità della matrice $B_n = \sum_{i=2}^{n} e_{i1} + \sum_{i=2}^{n} e_{1i}$.

Esercizio 2. Consideriamo la funzione lineare ϕ di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ nella base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

(1) determinare i polinomi caratteristico e minimo di A;
(2) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;
(3) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ ed eventualmente identificare i sottospazi stabili per A corrispondenti ai divisori del polinomio minimo e scrivere la matrice di ϕ usando una base ottenuta unendo basi dei sottospazi stabili trovati.

Esercizio 3. Sia $V = K[X]_{\leq 4}$ e consideriamo la funzione $F : V \to V$ definita da $F(p(X)) = p(X+1)$.
(1) Mostrare che F è lineare e scriverne la matrice nella base canonica $\mathcal{E}$ di V.
(2) Si considerino in V^* gli elementi $\delta_i : V \to K$ dati da $\delta_i(p(x)) = p(i)$ per $i = 0, 1, 2, 3, 4$; mostrare che formano una base $\mathcal{D}$ di V^* e scrivere la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{D}$ a $\mathcal{E}^*$ (duale di $\mathcal{E}$).
(3) Scrivere la matrice di $F^* : V^* \to V^*$ nella base $\mathcal{D}$.

Esercizio 3. Sia $V = K[X]_{\leq 4}$ e consideriamo la funzione $F : V \to V$ definita da $F(p(X)) = p(X+1)$.
(1) Mostrare che F è lineare e scriverne la matrice nella base canonica $\mathcal{E}$ di V.
(2) Si considerino in V^* gli elementi $\delta_i : V \to K$ dati da $\delta_i(p(x)) = p(i)$ per $i = 0, 1, 2, 3, 4$; mostrare che formano una base $\mathcal{D}$ di V^* e scrivere la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{D}$ a $\mathcal{E}^*$ (duale di $\mathcal{E}$).
(3) Scrivere la matrice di $F^* : V^* \to V^*$ nella base $\mathcal{D}$.

Esercizio 4. Sia A una matrice con polinomio minimo $(X-1)(X+2)(X-4)$. Determinare in funzione di A le matrici delle simmetrie di asse uno degli autospazi e direzione la somma degli altri due.

Esercizio 4. Sia A una matrice con polinomio minimo $(X+1)(X-2)(X+4)$. Determinare in funzione di A le matrici delle simmetrie di asse uno degli autospazi e direzione la somma degli altri due.

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e cartesiana le radici quarte del numero complesso -4. Determinare le equazioni hermitiane delle sei rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 2. Sia $V = M_n(K)$ lo spazio delle matrici d'ordine n e coefficienti in K. Consideriamo i sottinsiemi V_c delle matrici tali che per ogni colonna la somma delle entrate sia nulla e V_r delle matrici tali che per ogni riga la somma delle entrate sia nulla. Mostrare che sono sottospazi. Determinare dimensioni e basi per V_c, V_r, $V_c \cap V_r$, $V_c + V_r$. Qual è il massimo rango possibile per matrici in questi sottospazi?

Esercizio 3. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine n)

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_{ii} + \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} = \begin{pmatrix} x_1{+}1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x_2{+}1 & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & x_{n-1}{+}1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x_n{+}1 \end{pmatrix}$$

(tutte le entrate non scritte sono 1) e discutere la diagonalizzabilità della matrice $B_n = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}$.

Esercizio 4. Consideriamo la funzione lineare ϕ di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ nella base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

(1) determinare i polinomi caratteristico e minimo di A;
(2) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;
(3) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ ed eventualmente identificare i sottospazi stabili per A corrispondenti ai divisori del polinomio minimo e scrivere la matrice di ϕ usando una base ottenuta unendo basi dei sottospazi stabili trovati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e cartesiana le radici (complesse) del polinomio reale Z^4+6Z^2+25. Determinare le equazioni hermitiane delle sei rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno. *[sugg.:* $= (Z^4+10Z^2+25)-4Z^2 = (Z^2+5)^2-4Z^2 = \cdots$*]*

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U = \langle e_1+e_2, e_2+e_3, e_3+e_4\rangle \qquad \text{e} \qquad V : \begin{cases} X_1+X_2+X_3=0 \\ X_2+X_3+X_4=0 \\ X_2+X_3=0 \end{cases}$$

Trovare equazioni cartesiane per U e una base per V. Dimostrare che sono in somma diretta e calcolare la proiezione su U nella direzione V e la simmetria di asse V e direzione U, scrivendone le matrici in base canonica.

Esercizio 3. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine n)

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_{ii} + \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\delta_{i+j,\text{dispari}} = \begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ & x_2 & & & \\ & & x_3 & & \\ & & & x_4 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(dove $\delta_{i+j,\text{dispari}}$ vale 1 se $i+j$ è dispari, 0 altrimenti) e discutere la diagonalizzabilità della matrice $B_n = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\delta_{i+j,\text{dispari}}$.

Esercizio 4. Consideriamo la funzione lineare ϕ di matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nella base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

(1) determinare i polinomi caratteristico e minimo di A;
(2) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;
(3) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ ed eventualmente identificare i sottospazi stabili per A corrispondenti ai divisori del polinomio minimo e scrivere la matrice di ϕ usando una base ottenuta unendo basi dei sottospazi stabili trovati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e cartesiana le radici del polinomio $Z^3 - 2Z - 4$. Determinare le equazioni hermitiane delle tre rette che passano per tali punti e della circonferenza per i tre punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 2. Sia $V = K[X]_{\leq 4}$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 4 e coefficienti in K. Consideriamo i sottinsiemi V_p dei polinomi che si annullano in 0, 2 e -2 e V_d dei polinomi che si annullano in 1 e -1. Mostrare che sono sottospazi. Determinare dimensioni e basi per V_p, V_d, $V_p \cap V_d$, $V_p + V_d$. Se possibile, scrivere le matrici nella base canonica $1, X, X^2, X^3, X^4$ delle simmetrie aventi assi e direzioni questi due sottospazi.

Esercizio 3. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine n)

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1}(e_{i,i+1} + e_{i+1,i}) = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & x_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n \end{pmatrix}$$

(tutte le entrate fuori dalle tre diagonali centrali sono nulle) e discutere la diagonalizzabilità della matrice $B_n = \sum_{i=1}^{n-1}(e_{i,i+1} + e_{i+1,i})$.

Esercizio 4. Consideriamo la funzione lineare ϕ di matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ nella base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

(1) determinare i polinomi caratteristico e minimo di A;
(2) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;
(3) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ ed eventualmente identificare i sottospazi stabili per A corrispondenti ai divisori del polinomio minimo e scrivere la matrice di ϕ usando una base ottenuta unendo basi dei sottospazi stabili trovati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e cartesiana le radici dell'equazione $(Z-1)^3 = 8$. Determinare le equazioni hermitiane delle tre rette che passano per tali punti e della circonferenza per i tre punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 2. Sia $V = V_6(K)$ e consideriamo due sottospazi U e W in somma diretta ($V = U \oplus W$) con $\dim_K U = 3$. Sia $H = \{\phi \in \mathrm{End}_K(V) : \phi(U) \subseteq W,\ \phi(W) \subseteq U\}$. Mostrare che H è un sottospazio di $\mathrm{End}_K(V)$, determinarne una base e la dimensione. È vero che $H' = \{\phi \in \mathrm{End}_K(V) : \phi(U) \subseteq U,\ \phi(W) \subseteq W\}$ è un complementare di H? Trovare tutti i complementari di H in $\mathrm{End}_K(V)$.

Esercizio 3. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine n)

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_{ii} + \sum_{i=1}^{n} e_{i,n-i+1} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & * & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & x_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}$$

e discutere la diagonalizzabilità della matrice $B_n = \sum_{i=1}^{n} e_{i,n-i+1}$

Esercizio 4. Consideriamo la funzione lineare ϕ di matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ nella base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

(1) determinare i polinomi caratteristico e minimo di A;

(2) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;

(3) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ ed eventualmente identificare i sottospazi stabili per A corrispondenti ai divisori del polinomio minimo e scrivere la matrice di ϕ usando una base ottenuta unendo basi dei sottospazi stabili trovati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e cartesiana le radici dell'equazione $(Z-1)^3 = -Z^3$. Determinare le equazioni hermitiane delle tre rette che passano per tali punti e della circonferenza per i tre punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 2. Sia $V = M_4(K)$ e consideriamo i due sottospazi U formato dalle matrici a diagonali costanti (cioè $a_{ij} = a_{i'j'}$ se $i-j = i'-j'$) e W formato dalle matrici con antidiagonali costanti (cioè $a_{ij} = a_{i'j'}$ se $i+j = i'+j'$). Determinare basi, dimensioni ed equazioni cartesiane per $U, W, U \cap W, U+W$. Determinare un complementare di $U+W$ in V.

Esercizio 3. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine $n = 2m$)

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i e_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_i e_{i,n-i+1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \ddots & b_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots\!\!\!\vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n-1} & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ b_n & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

e discutere la diagonalizzabilità della matrice.

Esercizio 4. Consideriamo la funzione lineare ϕ di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nella base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

(1) determinare i polinomi caratteristico e minimo di A;
(2) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;
(3) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ ed eventualmente identificare i sottospazi stabili per A corrispondenti ai divisori del polinomio minimo e scrivere la matrice di ϕ usando una base ottenuta unendo basi dei sottospazi stabili trovati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e cartesiana le radici dell'equazione $(Z-1)^3 = 8$. Determinare le equazioni hermitiane delle tre rette che passano per tali punti e della circonferenza per i tre punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 2. Sia $V = M_n(K)$ con n pari, e consideriamo i seguenti due sottospazi: U formato dalle matrici tali che $a_{ij} = 0$ per $i \geq j$, e W formato dalle matrici tali che $a_{ij} = 0$ per $i + j > n$. Determinare basi, dimensioni ed equazioni cartesiane per $U, W, U \cap W, U + W$. Determinare un complementare di $U + W$ in V.

Esercizio 3. Calcolare i determinanti delle matrici (di ordine n)

$$A_n = \sum_{i=1}^{n-1} a e_{i,i+1} + \sum_{i=2}^{n} b e_{i,i-1} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & 0 & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

e discutere la diagonalizzabilità della matrice.

Esercizio 4. Consideriamo la funzione lineare ϕ di matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ nella base canonica di $\mathbb{Q}^4$.

(1) determinare i polinomi caratteristico e minimo di A;

(2) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale;

(3) discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ ed eventualmente identificare i sottospazi stabili per A corrispondenti ai divisori del polinomio minimo e scrivere la matrice di ϕ usando una base ottenuta unendo basi dei sottospazi stabili trovati.

Testo del compito:

Esercizio 1. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare la forma di Jordan di ϕ e delle sue potenze. Trovare tutte le basi di K^5 jordanizzanti per ϕ.

Esercizio 2. Un endomorfismo ϕ di uno spazio vettoriale V di dimensione finita su K è tale che $\phi^4 = 0$, $\phi^3 \neq 0$ e $\dim_K \ker \phi^2 = 4$. Determinare le possibili forme di Jordan per ϕ (specificando anche le possibili dimensioni di V) e per ϕ^2.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ dotato del riferimento canonico, consideriamo i sottospazi

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad \mathbb{M} = \begin{cases} X_1 + X_3 = 1 \\ X_2 + X_4 = 1 \end{cases} \quad , \quad r = O + \langle e_1 \rangle.$$

Determinare le posizioni reciproche (due a due) di $\mathbb{L}$, $\mathbb{M}$ ed r. Per ogni punto P della retta r determinare il piano π_P per P tale che $\mathbb{L} \vee \pi_P$ e $\mathbb{M} \vee \pi_P$ hanno dimensione 3. Descrivere con una equazione cartesiana l'insieme formato dall'unione di tali piani.

Esercizio 4. Siano dati due piani π, σ sghembi in $\mathbb{A}^5(K)$. Descrivere tutte le affinità F tali che $F(\pi) = \sigma$ e $F(\sigma) = \pi$, determinare sotto quali condizioni si tratta di simmetrie, e in questo caso determinarne assi e direzioni.

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ sono date le due rette $r : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ e $s : \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Determinare posizione reciproca, distanza, angolo, punti di minima distanza. Determinare tutte le rigidità ϕ tali che $\phi(r) = s$ e descrivere l'insieme formato dall'unione dalle rette $\phi(s)$ al variare di ϕ.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ sono dati la retta $r : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ e il piano $\pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Determinare posizione reciproca, distanza, punti di minima distanza. Sia r' la proiezione ortogonale di r su π; determinare r' e l'angolo tra r ed r'. È vero che distanza e tale angolo determinano la posizione reciproca di retta e piano in $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ a meno di rigidità (eventualmente, spiegare in che senso)?

Esercizio 3. Siano s_1 e s_2 simmetrie ortogonali rispetto a due piani π_1 e π_2 in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, e sia t_v la traslazione di vettore v. Determinare che tipo di rigidità, secondo la classificazione di Eulero, risulta la composizione $s_1 \circ t_v \circ s_2$, discutendo in particolare quando risulta una traslazione o una rotazione. *[sugg.: distinguere il caso di piani paralleli o incidenti, e decomporre opportunamente il vettore v.]*

Esercizio 4. Consideriamo il corpo dei quaternioni $\mathbb{H}$ identificato con lo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ usando la base canonica $1, i, j, k$ (come base ortonormale). Per ogni quaternione unitario $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ (con i coefficienti q_i reali) sia $\sigma_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ la moltiplicazione a sinistra per q, cioè $\sigma_q(x) = qx$. Scrivere la matrice di σ_q nella base canonica e verificare che si tratta di una isometria diretta. Determinare polinomio caratteristico e spazi reali stabili di σ_q.

Testo del compito:

Esercizio 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in base canonica.
Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autospazi di ϕ, una matrice di Jordan J e una matrice invertibile P tali che $P^{-1}AP = J$. Si determinino le forme di Jordan delle potenze di A e di $A - \mathbb{I}$. Quante sono le forme canoniche di Jordan aventi stesso polinomio minimo e stessa dimensione dell'autospazio proprio di A?

Esercizio 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, \ldots, e_4\}$ si considerino le sottovarietà lineari

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{e} \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Si determinino dimensione e posizione reciproca di r e π e un sistema di equazioni cartesiane per ciascuna delle due sottovarietà lineari. Mostrare che per ogni punto P non appartenente a r o π esiste una unica retta r_P passante per P e non sghemba sia con r che con π. Discutere le posizioni reciproche di tali rette al variare del punto P. Descrivere tramite una equazione cartesiana l'unione di tali rette al variare del punto P sulla retta $X_4 - 1 = X_3 = X_2 - 1 = 0$.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ sono dati due rette e un piano:

$$r = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{e} \quad \pi = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

Per ogni coppia di sottospazi, si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza, l'angolo tra loro. Si determinino le proiezioni ortogonali di r ed s su π, il loro punto di intersezione e l'angolo tra loro.

Esercizio 4. Discutere in termini della classificazione di Eulero la composizione di due rotazioni (di assi rette) in $\mathbb{E}^3$, distinguendo in quali casi si ottengono rotazioni o traslazioni. È vero che ogni rigidità diretta di $\mathbb{E}^3$ si scrive come composizione di al più due rotazioni?

Testo del compito:

Esercizio 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ in base canonica. Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autospazi di ϕ, una matrice di Jordan J e una matrice invertibile P tali che $P^{-1}AP = J$. Si determinino le forme di Jordan delle potenze di A e di $A - \mathbb{I}$. Quante sono le forme canoniche di Jordan aventi stesso polinomio minimo e stessa dimensione dell'autospazio proprio di A?

Esercizio 2. In uno spazio affine di dimensione 5 sono dati due piani complementari π e σ. Mostrare che per ogni punto P non appartenente a nessuno dei due piani esiste una unica retta r_P passante per P e incidente o parallela con π e σ, specificando per quali punti P la retta r_P è incidente entrambi, e per quali risulta parallela a π o a σ o a entrambi. Discutere le posizioni reciproche di tali rette al variare del punto P. In $\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$ siano dati

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{ed i punti} \quad P(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 1+\lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare le rette $r_{P(\lambda)}$ e descrivere tramite equazioni cartesiane l'unione di tali rette al variare di λ.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono date le due rette

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{e} \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza. Trovare le equazioni cartesiane dei sottospazi di dimensione 3 che contengono sia r sia s. Se possibile trovare i piani che intersecano sia r che s e che siano ortogonali ad entrambe.

Esercizio 4. Discutere in termini della classificazione di Eulero in $\mathbb{E}^3$ la composizione di una rotazione di angolo π (di asse una retta) e di una riflessione (di asse un piano), distinguendo in quali casi si ottengono riflessioni e rotoriflessioni. È vero che ogni rigidità inversa di $\mathbb{E}^3$ si scrive come tale composizione?

Testo del compito:

Esercizio 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ in base canonica. Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autospazi di ϕ, una matrice di Jordan J e una matrice invertibile P tali che $P^{-1}AP = J$. Si determinino le forme di Jordan delle potenze di A e di $A - \mathbb{I}$. Si determinino, se ne esistono, i vettori ciclici per ϕ e per le sue potenze. Quali sono le forme canoniche di Jordan aventi stesso polinomio minimo di A?

Esercizio 2. In uno spazio affine di dimensione 5 sono date tre rette r, s, t tali che $r \vee s \vee t$ sia tutto lo spazio. Mostrare che le rette sono due a due sghembe. Esistono rette che siano non sghembe con tutte e tre date r, s, t? Determinare le affinità che mandano ciascuna delle rette r, s, t in sè. Esistono affinità che permutano le tre rette tra di loro?

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati i due piani

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{e} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza. Si può definire un angolo tra i due piani (spiegare perché ed eventualmente calcolarlo)?

Esercizio 4. Discutere in termini della classificazione di Eulero in $\mathbb{E}^3$ la composizione di due rotazioni di angolo π (ciascuna di asse una retta). *[sugg.: distinguere a seconda della posizione reciproca dei due assi.]* È vero che ogni rigidità diretta di $\mathbb{E}^3$ si scrive come tale composizione?

Testo del compito:

Esercizio 1. Sia ϕ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione n con polinomio minimo $(X-1)^3(X+1)^2$ e tale che entrambi gli autospazi propri hanno dimensione 2. Determinare le possibili forme canoniche di Jordan di ϕ, specificando anche l'ordine della matrici e le sequenze delle dimensioni degli autospazi generalizzati.

Esercizio 2. In uno spazio affine di dimensione 5 sono dati i due sottospazi

$$\sigma : \begin{cases} X_2 - X_3 = -2 \\ X_4 - X_5 = -2 \end{cases} \qquad r : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Determinare le posizioni reciproche. Mostrare che per ogni punto dello spazio che non appartenga a $\sigma \cup r$ esiste una unica retta per quel punto e incidente o parallela sia con σ che con r. Esistono rette che siano parallele sia con σ che con r? Esistono rette che siano sghembe sia con σ che con r?

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati i due piani

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{e} \quad \sigma = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Si determini la posizione reciproca, e in particolare il più piccolo sottospazio affine che li contiene entrambi. Si può definire un angolo tra i due piani (spiegare perché ed eventualmente calcolarlo)?

Esercizio 4. Discutere in termini della classificazione di Eulero in $\mathbb{E}^3$ la composizione di due riflessioni (ciascuna di asse un piano). *[sugg.: distinguere a seconda della posizione reciproca dei due assi.]* È vero che ogni rigidità diretta di $\mathbb{E}^3$ si scrive come tale composizione?

Testo del compito:

Esercizio 3. Si consideri la matrice nilpotente standard N_{11} di ordine 11. Trovare la forma di Jordan di tutte le sue potenze.

Caratterizzare quali matrici nilpotenti sono potenze di una matrice avente polinomio minimo e caratteristico uguali.

Esercizio 2. In uno spazio affine di dimensione 5 sono dati i due sottospazi

$$\sigma : \begin{cases} X_2 - X_3 = -2 \\ X_1 - X_5 = -2 \end{cases} \qquad r : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Determinare le posizioni reciproche. Mostrare che per ogni punto dello spazio che non appartenga a $\sigma \cup r$ esiste una unica retta per quel punto e incidente o parallela sia con σ che con r. Esistono rette che siano parallele sia con σ che con r? Esistono rette che siano sghembe sia con σ che con r?

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati i due piani

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{e} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Si determini la posizione reciproca, e in particolare il più piccolo sottospazio affine che li contiene entrambi. Si può definire un angolo tra i due piani (spiegare perché ed eventualmente calcolarlo)?

Esercizio 4. Discutere in termini della classificazione di Eulero in $\mathbb{E}^3$ la composizione di due rotazioni di angolo $\pi/2$ attorno a due rette ortogonali tra loro. *[sugg.: distinguere a seconda della posizione reciproca dei due assi.]* Quali rigidità di $\mathbb{E}^3$ si scrivono come tale composizione?

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale e trigonometrica le radici cubiche del numero complesso $-1+i$. Determinare equazioni cartesiane ed hermitiane delle rette per l'origine e le tre radici trovate. Determinare l'equazione hermitiana del cerchio contenente le tre radici. Rappresentare il tutto nel piano di Gauss.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U = \langle e_1 + e_3 + e_4 \ , \ e_3 - e_4 \rangle \qquad \text{e} \qquad V : \begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ X_2 - X_4 = 0 \end{cases}$$

Trovare equazioni cartesiane per U e una base per V. Dimostrare che sono in somma diretta e calcolare la proiezione su U nella direzione V e la simmetria di asse V e direzione U, scrivendone le matrici in base canonica.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $K^3 \to K^4$ di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ nelle basi canoniche. Determinare nucleo e immagine. Determinare tutte le possibili inverse destre/sinistre. Determinare tutte le funzioni lineari che composte a destra/sinistra danno la funzione nulla.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $K^3 \to K^4$ di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ nelle basi canoniche. Determinare nucleo e immagine. Determinare tutte le possibili inverse destre/sinistre. Determinare tutte le funzioni lineari che composte a destra/sinistra danno la funzione nulla.

Esercizio 4. Sia U (risp. V) il sottospazio dello spazio di matrici $M_3(K)$ tali che le tre righe sono uguali tra loro (risp. le colonne sono uguali tra loro). Determinare basi, dimensioni ed equazioni cartesiane di U, V, $U \cap V$, $U + V$. Esiste un sottospazio complementare sia di U che di V?

Testo del compito:

Esercizio 1. Si considerino le seguenti matrici (di ordine n)

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i + y_j)e_{ij} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 & \cdots & x_1+y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n+y_1 & \cdots & x_n+y_n \end{pmatrix}$$

Calcolare determinanti e ranghi nei casi $n = 2, 3, 4$, specificando sotto quali condizioni il rango è esattamente 1. Generalizzare al caso n.

Esercizio 2. Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(1) determinare il polinomio caratteristico $p_A(X)$ e il polinomio minimo $m_A(X)$ di A;

(2) discutere la diagonalizzabilità di A su $\mathbb{C}$ ed eventualmente trovare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale; discutere la diagonalizzabilità di A su $\mathbb{R}$;

(3) per ciascun divisore irriducibile $q_i(X)$ di $m_A(X)$ in $\mathbb{R}[X]$, descrivere l'endomorfismo $q_i(\phi)$ e determinare una base $\mathcal{B}_i$ del suo nucleo. Scrivere la matrice di ϕ rispetto alla base ottenuta unendo le basi $\mathcal{B}_i$. Come cambia la risposta lavorando in $\mathbb{C}[X]$?

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare la forma di Jordan di ϕ, delle sue potenze e delle potenze di $\phi - \mathrm{id}$. Trovare tutte le basi di K^5 jordanizzanti per ϕ.

Esercizio 4. Sia $V = M_2(K)$ (matrici quadrate di ordine 2). Per ogni $A \in V$ definiamo la funzione $t_A : V \to K$ tramite $t_A(X) := \mathrm{tr}(XA)$ (traccia della matrice prodotto XA, cioè la somma degli elementi diagonali). Mostrare che t_A è lineare. Mostrare che la mappa $V \to V^*$ (definita mandando A in t_A) è un isomorfismo, scrivendone la matrice nelle basi canonica e duale di V e V^* rispettivamente. Per ogni elemento $\alpha \in V^*$ trovare $A \in V$ tale che $\alpha = t_A$.

Testo del compito:

Esercizio 1. Scrivere in forma esponenziale, trigonometrica e cartesiana le radici quarte del numero complesso $e^{i2\pi/3}$. Determinare le equazioni hermitiane delle sei rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno.

Esercizio 2. Sia $V = M_3(K)$ lo spazio delle matrici d'ordine 3 e coefficienti in K. Consideriamo i sottinsiemi V_d delle matrici tali che tutti gli elementi della diagonale principale sono nulli e V_a delle matrici tali che tutti gli elementi della antidiagonale principale sono nulli. Mostrare che sono sottospazi. Determinare dimensioni e basi per V_d, V_a, $V_d \cap V_a$, $V_d + V_a$. Qual è il massimo rango possibile per matrici in questi sottospazi? Esiste un sottospazio complementare comune a V_d e V_a?

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare i polinomi caratteristico e minimo di A. Determinare la forma di Jordan di A e una base jordanizzante per ogni potenza ϕ^n con $n > 0$. Esistono sottospazi W di K^5 tali che ϕ ristretta a W sia diagonalizzabile? Se sì determinarne uno di dimensione massima.

Esercizio 4. Sia $P = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Si consideri l'applicazione $\phi: P \to P$ definita da $p(X) \mapsto p(X-2)$.

(1) Mostrare la linearità di ϕ e determinarne la matrice rispetto alla base canonica di P.

(2) Si mostri che l'insieme $\mathcal{B}$ formato dalle potenze (da 0 a 3) di $X-2$ formano una base di P e si scriva la matrice di ϕ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(3) Si mostri che ϕ^* è un isomorfismo e si determini la matrice dell'inversa rispetto alla base duale $\mathcal{B}^*$.

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici (eventualmente complesse) del polinomio Z^4+3Z^2-4. Determinare le equazioni hermitiane delle sei rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno, e in particolare indicare l'immagine tramite l'inversione dei punti interni del rombo i cui vertici sono le radici trovate.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Consideriamo i sottospazi V_1 formato dai polinomi che si annullano in 1, e V_{-1} formato dai polinomi che si annullano in -1. Determinare dimensioni e basi per V_1, V_{-1}, $V_1 \cap V_{-1}$, $V_1 + V_{-1}$. Per ogni polinomio in V trovare, se possibile, tutti i modi di scriverlo come somma di un polinomio in V_1 e un polinomio in V_{-1}.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{Q}^5$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare i polinomi caratteristico e minimo di A, gli autospazi di ϕ, la forma di Jordan di A e una base jordanizzante. Decomporre $\phi = \phi_D + \phi_N$ con ϕ_D endomorfismo diagonalizzabile e ϕ_N nilpotente. Scrivere la matrice di ϕ_N rispetto alla base canonica.

Esercizio 4. Sia $V = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 2 a coefficienti in $\mathbb{C}$. Data $A \in V$, si consideri la mappa $s_A : V \to V$ data dalla moltiplicazione a sinistra per A, cioè $s_A(X) = AX$. Mostrare che s_A è lineare, scrivere la matrice di s_A in base canonica e calcolare il suo determinante (in funzione del determinante di A). Determinare polinomi caratteristico e minimo di s_A in funzione di quelli di A. Determinare la forma di Jordan di s_A in funzione della forma di Jordan di A. Generalizzare al caso di matrici di ordine n.

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici (eventualmente complesse) del polinomio $Z^3 - 2Z^2 + Z - 2$. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno, e in particolare indicare l'immagine tramite l'inversione dei punti interni del triangolo i cui vertici sono le radici trovate.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 4. Consideriamo i sottospazi $V_{\geq 2}$ formato dai polinomi che si annullano in 1 con molteplicità almeno 2, e $V_{\leq 2}$ formato dai polinomi che hanno grado minore o uguale a 2. Determinare dimensioni e basi per $V_{\geq 2}$, $V_{\leq 2}$, loro intersezione e somma. Per ogni polinomio in V trovare, se possibile, tutti i modi di scriverlo come somma di un polinomio in $V_{\geq 2}$ e un polinomio in $V_{\leq 2}$.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{Q}^5$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare i polinomi caratteristico e minimo di ϕ, gli autospazi di ϕ, la forma di Jordan di A e una base jordanizzante. Determinare tutte le basi jordanizzanti per A.

Esercizio 4. Sia $V = \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici con 3 righe e 2 colonne a coefficienti in $\mathbb{C}$. Sia $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ una matrice quadrata d'ordine 3. Si consideri la mappa $s_A : V \to V$ data dalla moltiplicazione a sinistra per A, cioè $s_A(X) = AX$. Mostrare che s_A è lineare, scrivere la matrice di s_A in base canonica e calcolare il suo determinante (in funzione del determinante di A). Determinare polinomi caratteristico e minimo di s_A in funzione di quelli di A. Determinare la forma di Jordan di s_A in funzione della forma di Jordan di A.

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici cubiche (eventualmente complesse) del numero -3. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno, e in particolare indicare l'immagine tramite l'inversione dei punti esterni al triangolo i cui vertici sono le radici trovate.

Esercizio 2. Sia $V = \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 3 a coefficienti in $\mathbb{C}$. Sia U_p il sottinsieme formato dalle matrici tali che la somma sulla diagonale principale e la somma sulla prima colonna siano nulle, e sia U_a il sottinsieme formato dalle matrici tali che la somma sulla antidiagonale principale e la somma sulla prima riga siano nulle. Determinare basi e dimensioni per U_p, U_a, $U_p \cap U_a$, $U_p + U_a$. Determinare se possibile tutti i modi in cui una generica matrice in V si può scrivere come somma di una matrice in U_p e una in U_a.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{Q}^5$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare i polinomi caratteristico e minimo di ϕ, gli autospazi di ϕ, la forma di Jordan di A e una base jordanizzante. Determinare tutte le basi jordanizzanti per A.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 5}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 5, dotato del prodotto dell'anello quoziente $\mathbb{R}[X]/(X^6)$ (cioè con $X^6 = X^7 = \cdots = 0$). Sia $q(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 + a_5X^5 \in V$ e sia $\mu_q : V \to V$ la moltiplicazione per q, cioè $\mu_q(p(X)) = p(X)q(X)$. Determinare la matrice di μ_q nella base canonica di V, polinomi caratteristico e minimo di μ_q, la forma di Jordan di μ_q in funzione dei coefficienti del polinomio $q(X)$.

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici (eventualmente complesse) del polinomio $X^3 - 4X^2 + 6X - 4$. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno, e in particolare indicare l'immagine tramite l'inversione dei punti esterni al triangolo i cui vertici sono le radici trovate.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 5}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 5. Consideriamo i sottospazi V_1 formato dai polinomi $P(X)$ tali che $P(X) = X^5 P(1/X)$, e V_{-1} formato dai polinomi $P(X)$ tali che $P(X) = -X^5 P(1/X)$. Determinare dimensioni e basi per V_1, V_{-1}, $V_1 \cap V_{-1}$, $V_1 + V_{-1}$. Per ogni polinomio in V trovare, se possibile, tutti i modi di scriverlo come somma di un polinomio in V_1 e un polinomio in V_{-1}.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{Q}^5$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare i polinomi caratteristico e minimo di ϕ, gli autospazi di ϕ, la forma di Jordan di A e una base jordanizzante. Determinare tutte le basi jordanizzanti per A.

Esercizio 4. Sia $V = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 2 a coefficienti in $\mathbb{C}$. Si consideri la mappa $s : V \to V$ data da $s(X) = X + X^{\mathrm{t}}$. Mostrare che s è lineare, determinare nucleo e immagine, scrivere la matrice di s in base canonica e calcolare il suo determinante. Determinare polinomi caratteristico e minimo di s. Determinare la forma di Jordan di s. Generalizzare al caso di matrici di ordine n.

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici quarte (eventualmente complesse) del numero -16. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno, e in particolare indicare l'immagine tramite l'inversione dei punti interni al quadrato i cui vertici sono le radici trovate.

Esercizio 2. Sia $V = \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 3 a coefficienti in $\mathbb{C}$. Sia U_p il sottinsieme formato dalle matrici tali che le somme su ogni riga sia siano uguali tra loro, e sia U_a il sottinsieme formato dalle matrici tali che le somme su ogni colonna sia siano uguali tra loro. Determinare basi e dimensioni per U_p, U_a, $U_p \cap U_a$, $U_p + U_a$. Determinare se possibile tutti i modi in cui una generica matrice in V si può scrivere come somma di una matrice in U_p e una in U_a.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{Q}^5$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Determinare i polinomi caratteristico e minimo di ϕ, gli autospazi di ϕ, la forma di Jordan di A e una base jordanizzante. Determinare tutte le basi jordanizzanti per A.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 5}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 5 dotato del prodotto dell'anello quoziente $\mathbb{R}[X]/(X^6)$ (cioè con $X^6 = X^7 = \cdots = 0$). Consideriamo la funzione $q : V \to V$ data da $q(P(X)) = P(X^2)$. Mostrare che q è lineare, determinare la matrice di q nella base canonica di V, polinomi caratteristico e minimo di q, la forma di Jordan di q. Generalizzare ai polinomi di grado minore o uguale a n.

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ dotato del riferimento canonico, consideriamo i sottospazi

$$\mathbb{L} = \begin{cases} X_1 - X_3 = 1 \\ X_2 - X_4 = 1 \end{cases} \quad , \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Determinare le posizioni reciproche di $\mathbb{L}$ ed r. Per ogni punto P dello spazio determinare, se esistono, tutte le rette t_P per P tali che $\mathbb{L} \vee t_P$ abbia dimensione 3 e $r \vee t_P$ sia un piano. In quali casi vi è una unica retta? Ve ne sono che siano parallele a $\mathbb{L}$ o ad r?

Determinare da quanti parametri dipendono le affinità F di $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ tali che $F(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$ e $F(r) \subseteq r$.

Esercizio 2. Siano A, B, C i vertici di un triangolo in uno spazio affine (tre punti non allineati), e si indichino con a, b, c i tre lati ($a = B \vee C$, ecc.). Dati tre punti A', B', C' rispettivamente sui tre lati ($A' \in a$, ecc.) e diversi dai vertici, mostrare che esistono altri tre punti A'', B'', C'' sugli stessi lati ($A'' \in a$, ecc.) tali che $(A\ B\ C'')(A\ B\ C') = -1$, ecc. (esplicitare come trovare A'' dati B, C, A'. ecc.).

Mostrare che $A \vee A'$, $B \vee B'$, $C \vee C'$ concorrono in un punto se e solo se A'', B'', C'' sono allineati. Che enunciato si può fare con punti A''', B''', C''' ($A''' \in a$, ecc.) tali che $(A\ B\ C''')(A\ B\ C') = 1$, ecc.?

[sugg.: usare coordinate baricentriche]

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $V_4(\mathbb{R})$, è dato il piano W generato dai vettori $e_1 + e_2 + e_3$, $e_2 + e_3 + e_4$. Determinare le matrici nella base canonica della proiezione ortogonale e della simmetria ortogonale di asse W.

Mostrare in generale che una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è matrice nella base canonica di una proiezione ortogonale in $V_n(\mathbb{R})$ se e solo se valgono le seguenti due condizioni: $A^2 = A$ e $A^{\mathrm{t}} = A$. Enunciare e dimostrare una caratterizzazione simile per le simmetrie ortogonali.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ sono date le due rette $r : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ e $s : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. Determinare posizione reciproca, distanza, punti di minima distanza, equazioni cartesiane della retta di minima distanza.

Caratterizzare tramite una equazione cartesiana l'insieme dei punti equidistanti dalle due rette date.

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, siano σ una simmetria ortogonale rispetto a un piano π e ρ una rotazione rispetto ad una retta r. Determinare che tipo di rigidità, secondo la classificazione di Eulero, risulta la composizione $\sigma \circ \rho$. In quali casi si ha $\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$? *[sugg.: distinguere a seconda delle posizioni reciproche di π ed r.]*

Esercizio 2. Sono dati due piani sghembi π_1, π_2 in uno spazio proiettivo di dimensione 5. Mostrare che per ogni punto P non appartenente ai due piani esiste una unica retta r_P passante per P e incidente π_1, π_2. Determinare la posizione reciproca delle rette r_P ed r_Q a seconda dei punti P, Q (non appartenenti ai due piani), distinguendo a seconda della posizione reciproca della retta $P \vee Q$ con i due piani.

Dualizzare tutti gli enunciati trovati.

Esercizio 3. Dato un triangolo di vertici A, B, C (lati a, b, c) in un piano proiettivo, e dati $A', A'' \in a$, $B', B'' \in b$, $C', C'' \in c$ (generici, cioè distinti tra di loro e dai vertici), mostrare che: esiste una proiettività del piano cha manda ordinatamente A, B, C, A', B', C' in A, B, C, A'', B'', C'' se solo se risulta $(A\ B\ C'\ C'')(B\ C\ A'\ A'')(C\ A\ B'\ B'') = 1$.

Dedurre dalla proprietà precedente che: se A'', B'', C'' sono allineati, allora A', B', C' sono allineati se e solo se $(A\ B\ C'\ C'')(B\ C\ A'\ A'')(C\ A\ B'\ B'') = 1$. Dedurre da questo il teorema di Menelao affine.

Dualizzare gli enunciati precedenti.

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha esattamente 3 punti uniti. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, sia P un punto unito e Q un punto non unito; determinare il birapporto $(P\ Q\ \phi Q\ \phi^n Q)$.

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Si determinino le equazioni di tutte le rette complanari con ciascuna delle tre date (sugg.: per ogni punto T di t si calcoli la retta per T e complanare con r, s; in questo modo si "perde" qualche retta?). Si descriva con una equazione cartesiana l'insieme formato dalla unione di tali rette.

Si trovino, se esistono, tutte le affinità che mandano tale insieme in sè.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati due piani:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini la posizione reciproca, in particolare equazioni cartesiane per lo spazio affine generato; si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza, l'angolo tra i piani.

Si determinino, se esistono, tutte le isometrie ϕ tali che $\phi(\pi_1) = \pi_1$ e $\phi(\pi_2) = \pi_2$. Si determinino. se esistono, tutte le isometrie ψ tali che $\psi(\pi_1) = \pi_2$ e $\psi(\pi_2) = \pi_1$.

Esercizio 3. In uno spazio proiettivo di dimensione 3 sono dati tre triangoli non complanari e prospettivi dallo stesso punto. Mostrare che le tre rette di omologia (delle tre coppie di triangoli prospettivi) sono sempre concorrenti in un punto, e caratterizzare i casi in cui coincidono (sugg.: considerare i birapporti sulle tre rette di prospettività).

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti tutti e soli quelli di due rette sghembe. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, sia P un punto unito e Q un punto non unito; determinare il birapporto $(P\ Q\ \phi Q\ \phi^{-1}Q)$.

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva con una equazione cartesiana l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati un piano e una retta:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad r = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza, l'angolo tra loro.

Si determinino, se esistono, tutte le isometrie ϕ tali che $\phi(\pi) = \pi$ e $\phi(r) = r$.

Esercizio 3. In uno spazio proiettivo (di dimensione 3) sono date tre rette non complanari e concorrenti in un punto O, e su ciascuna retta tre punti distinti e distinti da O. Applicando il teorema di Pappo alle tre coppie di rette si ottengono tre rette di collineazione (su tre piani diversi). Discutere le posizioni reciproche di queste rette, in particolare caratterizzare i casi un cui sono in un fascio, o in cui due si intersecano (risposta in termini di birapporti dei punti sulle rette date).

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti tutti e soli quelli di un piano e un punto esterno al piano. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, sia Q un punto non unito; determinare il birapporto $(Q\ \phi Q\ \phi^2 Q\ \phi^3 Q)$.

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t non appartenente ad $r \cup s$, si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati due piani:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza.

Si determinino, se esistono, tutte le isometrie ϕ tali che $\phi(\pi) = \pi$ e $\phi(\sigma) = \sigma$.

Esercizio 3. In uno piano proiettivo sono date due rette a, b concorrenti in un punto $O = a \wedge b$, e su ciascuna retta tre punti distinti $A_0, A_1, A_2 \in a$, $B_0, B_1, B_2 \in b$ e distinti da O. Applicando il teorema di Pappo si ottiene la retta di collineazione c contenente i tre punti $C_0 = (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $C_1 = (A_0 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_0)$, $C_2 = (A_0 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_0)$. Siano infine $O_a = c \wedge a$, $O_b = c \wedge b$. Determinare la retta di collineazione per i punti $A_0, A_1, A_2 \in a$ e $C_0, C_1, C_2 \in c$ e per i punti $B_0, B_1, B_2 \in b$ e $C_0, C_1, C_2 \in c$. Discutere le relazioni tra i birapporti delle quaterne di punti in cui il primo punto è uno tra O, O_a, O_b e i successivi tre una terna tra $A_0, A_1, A_2 \in a$, $B_0, B_1, B_2 \in b$, $C_0, C_1, C_2 \in c$ (quando hanno senso?).

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti tutti e soli quelli di una retta e due punti esterni alla retta. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, siano P, Q due punti non uniti; determinare il birapporto $(P\ Q\ \phi P\ \phi Q)$.

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t non appartenente ad $r \cup s$, si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati due piani:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza.

Si determinino, se esistono, tutte le isometrie ϕ tali che $\phi(\pi) = \pi$ e $\phi(\sigma) = \sigma$.

Esercizio 3. In un piano proiettivo sono date due rette a, b, sia $O = a \wedge b$, e un punto esterno C. Per ogni coppia $A_0, A_1 \in a$ di punti in a distinti e diversi da O, siano $B_0, B_1 \in b$ i punti di b che si ottengono proiettando da C (cioè $B_i = b \wedge (C \vee A_i)$). Mostrare che tutti i punti $(A_0 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_0)$ sono allineati su una retta c passante per O.

Mostrare che la retta c è quarta armonica dopo a, b e $O \vee C$ (nel fascio di centro O).

Dualizzare la costruzione.

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti tutti e soli quelli di due rette sghembe tra loro. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, siano P, Q due punti non uniti; determinare il birapporto $(P\ \phi P\ Q\ \phi Q)$.

da venire

UNIVERSITAS · STUDII · PADUANI

MCCXXII