

① $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V_4(K)$
 $= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

dove $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

da risolti di $\alpha = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$
 $\beta = x_2 - x_4$
 $\gamma = -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4$
 $\delta = x_1 - x_3 + x_4$

quindi abbiamo
 $\pi(X) = \pi_{UV}^W(X) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ x_2 - x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
 $\alpha_E(\pi)$

e
 $\sigma(X) = \sigma_{UV}^{WV}(X) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \delta \\ -\beta - \delta \\ -\gamma - \delta \\ \alpha - \delta \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ -x_2 \\ x_1 - x_2 - x_4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
 $\alpha_E(\sigma)$

abbiamo $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

dunque i 4 vettori sono base $V_4(K)$,
e i 3 sottospazi sono in somma diretta.

Nella base β data dai 4 vettori dell'esercizio abbiamo

$\alpha_\beta(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ e $\alpha_\beta(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

che essendo matrici diagonali come tutte le basi,
quindi $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi$,

$\alpha_\beta(\pi \circ \sigma) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

che ha pol. caract. $X^2(X+1)(X-1)$
e polinomio minimo $X(X+1)(X-1)$ (che è diagonale).

Se $\emptyset \subset V_n(K)$ e tale che $\emptyset^3 = \emptyset$,
allora il polinomio minimo di $\emptyset$
è un divisore di $X^2 - X$ (perché $\emptyset^2 - \emptyset = 0$)
" $X(X-1)$
" $X(X+1)(X-1)$

E quindi ha fewer in K (se K ha $\text{char} \neq 2$),
perciò $\emptyset$ è diagonalizzabile e

$V_n(K) = V_\emptyset(1) \oplus V_\emptyset(-1) \oplus V_\emptyset(0)$

dove $V_\emptyset(i)$ = autospazio dell'autovale i .

Usando basi degli autospazi:

$\alpha(\emptyset) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Abbiamo le decomposizioni richieste,
un generatore non unico (la partizione è unica?).

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$P_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & X+1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & X-1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)(X+1)+2 = (X+1)(X-1) = (X^2+1)(X^2-2)$

in $\mathbb{C}[X]$ abbiamo $= (X+i)(X-i)(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2})$
i sono 4 radici distinte;
quindi è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$)
e $m_A(X) = P_A(X)$ (questo non dipende
dal campo!).

I 4 autovettori hanno tutti modulo 1 e nullità 1,
troviamo gli autospazi:

i: $\ker \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1-i & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-i & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1-i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ (1-i)/3 \\ -2/3 \\ -1-i \end{pmatrix} \right\rangle$
*dalla I equazione (la IV è dipendente)
poi rimosso x_2, x_3
da II* III equazione...*

-i: $\ker \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1+i & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1+i & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1+i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ (1+i)/3 \\ -2/3 \\ -1+i \end{pmatrix} \right\rangle$

$\sqrt{2}$: $\ker \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\sqrt{2} & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1+\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$-\sqrt{2}$: "conjugato in $\sqrt{2}$ " : $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

quindi usando la matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1-i}{3} & \frac{1+i}{3} & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1+\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ -1-i & -1-i & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{C})$

abbiamo $H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -i & & \\ & & i & \\ & & & \sqrt{2} & \\ & & & & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Nel campo $\mathbb{R}$ invece non abbiamo tutti gli autovettori.

$P_A(X) = (X^2+1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$

quindi la matrice non è numerica + diagonalizzabile,
ma $V_f(\mathbb{R}) = \ker(A^2+1) \oplus \ker(A-\sqrt{2}) \oplus \ker(A+\sqrt{2})$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1+\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
 $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -1-i \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -1+i \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
generalmente parti reali e im

e nella base data da $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1+\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

la matrice risulta $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & \sqrt{2} & \\ & & & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

③ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & X & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & X & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = X^2(X-1)^2$

autov.: 0 mult 3 autospazio $\ker(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ mult 2 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
1 mult 2 autospazio $\ker(A-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ mult 1 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\downarrow$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A \sim J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Per trovare le basi jordaniane basta vedere
le sequenze dei nuclei:

$\ker(A) \subsetneq \ker(A^2) = \ker(A^3) = \dots$
 $= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\ker(A-1) \subsetneq \ker(A-1)^2 = \ker(A-1)^3 = \dots$
 $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (A-1)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

quindi possiamo usare:

per 0 $\left\{ \begin{array}{l} v_3 \text{ qualsiasi vettore } \ker(A^2) \setminus \ker(A) : v_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_2 = A v_3 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$
per 1 $\left\{ \begin{array}{l} v_5 \text{ qualsiasi vettore } \ker(A-1)^2 \setminus \ker(A-1) : v_5 = \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_4 = (A-1)v_5 = \delta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Abbiamo $m(X) = X^2(X-1)^2$ $\leftarrow$ blocchi jordaniani ordine 2,
dimensione un blocco d'ordine 2 (sia 0 che 1)
due autospazi 0 = 2 $\leftarrow$ due blocchi per 0
due autospazi 1 = 1 $\leftarrow$ 1 blocco per 1

quindi:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$
sotto le uniche possibilità.