③ $J = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \alpha & \\ & & & \beta \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \beta \end{matrix}$

punti uniti sono P_0, P_1 di autovalore α,
piú tutti i punti della retta P_0P_1
e P_2 di autovalore β.
per dualità ci è con ipotesi unito (rel. β)
anche $P_0vP_1vP_2vP_3$,
e un fascio di ulteriori uniti dati dal piano $P_1vP_3vP_4$
(parametrizzati come $P_1vP_3vP_4vQ$ con $Q \in P_0vP_2$)

Nell'ipotesi unito rel. β: $P_0P_1P_2P_3$ la proiettività
induce una proiettività di matrice associata $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}$
quindi con retta p.u. e un p.u. esterno,
e vi sono un fascio di piani uniti (dati dalla retta
P_1vP_3 nell'ipotesi; si tratta delle intersezioni
del fascio di ipotesi unite con l'ipotesi $BP_1P_2P_3$...)
parametrizzati da P_1vP_3vQ con $Q \in P_0vP_2$ e ci
è indotta una omologia generale se $Q = P_0$,
speciale se $Q \neq P_0$, e si deducono le rette unite;

e un piano unito esterno al fascio: $P_0P_1P_2$, dove è
indotta una omologia ordinaria (un fascio di rette
unite, di centro P_1)

Negli ipotesi del fascio, ovvero $P_1vP_3vP_4vQ$
con $Q \in P_0vP_2$ abbiamo:
se $Q = P_0$ proiettività indotta di matrice $\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & 1 \\ & & \beta \end{pmatrix}$
se $Q \neq P_0$ " " " $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}$

da cui si deducono fasci e rette unite.

Abbiamo 2 tipi di rette unite: a seconda che la
proiettività indotta sia del tipo $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$
(ma $\begin{pmatrix} \beta & \\ & \beta \end{pmatrix}$ basta scambiare α con β...):

nel primo caso possiamo usare $P = \binom{1}{1}$ e allora
$(P\ \varphi P\ \varphi^2 P\ \varphi^3 P) = \left(\binom{1}{1}, \binom{\alpha}{\beta}, \binom{\alpha^2}{\beta^2}, \binom{\alpha^3}{\beta^3}\right) =$
$= (1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3) = \frac{\rho^2-1}{\rho^2-\rho} \cdot \frac{\rho^2-\rho}{\rho^3-1} = \frac{(\rho^2-1)^2}{(\rho-1)(\rho^3-1)} =$
$= \frac{(\rho+1)^2}{\rho^2+\rho+1}$

nel secondo caso possiamo usare $P = \binom{0}{1}$ e allora
$(P\ \varphi P\ \varphi^2 P\ \varphi^3 P) = \left(\binom{0}{1}, \binom{1}{\alpha}, \binom{2\alpha}{\alpha^2}, \binom{3\alpha^2}{\alpha^3}\right) =$
$= (\infty\ \frac{1}{\alpha}\ \frac{2}{\alpha}\ \frac{3}{\alpha}) = (\infty\ 1\ 2\ 3) = \frac{3-1}{2-1} = 2.$

② Usiamo $A = \binom{1}{0}$, $B = \binom{0}{1}$, $C = \binom{0}{0}$, $O = \binom{1}{1}$
$A' = \binom{1+a}{1}$, $B' = \binom{1}{1+b}$, $C' = \binom{1}{1+c}$

da cui
$AB \wedge A'B' = \binom{-a}{b}$
$AC \wedge A'C' = \binom{a}{-c}$
$BC \wedge B'C' = \binom{b}{-c}$
$\Big\} \quad r = (bc, ac, ab)$
$1+x \quad 1 \quad 1 \rightsquigarrow (1+x)bc + ac + ab = 0$
$1+x = -\frac{a(b+c)}{bc}$

$\tilde{A} = OA \wedge r = \begin{pmatrix} -\frac{a(b+c)}{bc} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a(b+c) \\ bc \\ bc \end{pmatrix}$
$\tilde{B} = OB \wedge r = \begin{pmatrix} ac \\ -b(a+c) \\ ac \end{pmatrix}$
$\tilde{C} = OC \wedge r = \begin{pmatrix} ab \\ ab \\ -c(a+b) \end{pmatrix}$

$A_1 = OA \wedge BC = \binom{0}{1}$
$B_1 = OB \wedge AC = \binom{1}{0}$
$C_1 = OC \wedge AB = \binom{1}{0}$

$A_1' = OA \wedge B'C' = \begin{pmatrix} b+c \\ b+c+bc \\ b+c+bc \end{pmatrix}$
$B_1' = OB \wedge A'C' = \begin{pmatrix} a+c+ac \\ a+c \\ a+c+ac \end{pmatrix}$
$C_1' = OC \wedge A'B' = \begin{pmatrix} a+b+ab \\ a+b+ab \\ a+b \end{pmatrix}$

e possiamo calcolare:
$(O\ A\ A'\ \tilde{A}) = \left(\binom{1}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1+a}{1}, \binom{-a(b+c)}{bc}\right) =$
$= \left(1 \quad \infty \quad 1+a \quad -a\frac{b+c}{bc}\right) = \frac{a}{-a\frac{b+c}{bc}-1} = \frac{-abc}{ab+ac+bc}$

Similmente ai a,b,c quindi $= (OBB'\tilde{B}) = (OCC'\tilde{C})$
i punti sono quaterne proiettate tra loro da fasci opportuni
(i tre punti che suddividono la retta di omologia r).

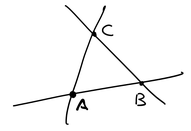
per: $(O\ A\ A'\ A_1) = \left(\binom{1}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1+a}{1}, \binom{0}{-1}\right) =$
$= (1 \quad \infty \quad 1+a \quad 0) = \frac{a}{0-1} = -a$
$(O\ B\ B'\ B_1) = -b$
$(O\ C\ C'\ C_1) = -c$
e $(O\ A'\ A\ A_1') = \left(\binom{1}{1}, \binom{1+a}{1}, \binom{1}{0}, \binom{b+c}{b+c+bc}\right) =$
$= (1 \quad 1+a \quad \infty \quad \frac{b+c}{b+c+bc}) = \frac{b+c-(1+a)(b+c+bc)}{b+c-(b+c+bc)} =$
$= \frac{-abc-ab-ac-bc}{bc} = -a - \frac{a}{b} - \frac{a}{c} - 1$

$(O\ B'\ B\ B_1') = \frac{-abc-ab-ac-bc}{ac} = -b - \frac{b}{a} - \frac{b}{c} - 1$
$(O\ C'\ C\ C_1') = \frac{-abc-ab-ac-bc}{ab} = -c - \frac{c}{a} - \frac{c}{b} - 1$

escludendo i casi banali: $a = b$ sse $(OAA'A_1) = (OBB'B_1)$
sse $(OA'AA_1') = (OB'BB_1')$ ecc.
(di nuovo, se $a=b$ si tratta di quaterne proiettate tra loro...)

$(OAA'\tilde{A}) = -1$ sse $2abc = ab+ac+bc$
sse $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
sse $(AOA'A_1) + (BOB'B_1) + (COC'C_1) = -1$

Duale: si tratta di triangoli omologici,
e si parla di quaterne di rette....

④


$A = \binom{1}{0}$ $B = \binom{0}{0}$ $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$A' = \binom{0}{a}$ $B' = \binom{1}{b}$ $C' = \binom{1}{c}$
$A'' = \binom{0}{-a}$ $B'' = \binom{1}{-b}$ $C'' = \binom{1}{-c}$

$A'B'C'$ allineati sse $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = 0$ sse $ac+b=0$

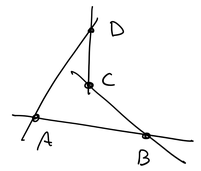
AA'' BB'' CC'' concorrenti sse $\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ sse $ac+b=0$
$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ $(c\ 1\ 0)$ $(b\ 0\ 1)$ dunque equivalenti!
$\{$
$(0\ a\ 1)$

Duale: $a'a''$ rette per A ... ; a', b', c' concorrenti
$b'b''$ rette per B sse
$c'c''$ rette per C $a''a''$, $b''b''$, $c''c''$ allineati
omettile coniugati

Così definiti: usando A'', B'', C'' punti impropri
(sono allineati sulla retta impropria)
allora A', B', C' sono i punti medi
e le mediane corrispondono ai vari punti!

usando a', a'', b', b'', c', c'' le BISETTRICI (notazione corretta?)
allora: siccome ogni tre bisettrici interne
si incontrano mai in un punto,
le intersezioni bisettrice esterna-lato opposto
danno 3 punti allineati...

(Si possono dedurne vari teoremi, anche con le ortogonalità,
oppure mettere in relazione i teoremi Ceva/Menelao proiettivi...)



$A = \binom{1}{0}$ $B = \binom{0}{0}$ $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$A' = \binom{1}{0}$ $B' = \binom{0}{b}$ $C' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ $D' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$
$A'' = \binom{-1}{0}$ $B'' = \binom{0}{-b}$ $C'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}$ $D'' = \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A'B'C'D'$ complanari sse $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$ sse $1 - abcd = 0$

$A''B''C''D''$ complanari sse $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{vmatrix} = 0$ sse $1 - abcd = 0$

CDA'', ADB'', ABC'', BCD'' stelle sse $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = 0$ sse $abcd - 1 = 0$
$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 & 0 & -1 \\ 0 & b & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ $\{$ $(0\ 0\ c\ 1)$ $(1\ 0\ 0\ d)$
$(0\ b\ 1\ 0)$
$\{$
$(a\ 1\ 0\ 0)$

e quindi sono tutte condizioni equivalenti.