

① $Q(X) = X_0^2 + X_0X_1 - 2X_1X_2 + 2X_1X_3 - X_2^2 + X_3^2$ matrice $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = G$
 $= X_0(X_0 + X_1) - (X_2 - X_1)^2 + (X_3 + X_1)^2$
 e quindi c'è separazione (2,2)
 per una b.o. possiamo usare e_3, e_2, e_0 (sono già ortogonali)
 e poi $v \in \langle e_0, e_1, e_3 \rangle^\perp = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ da fornire $v^T G v < 0$,

i sottospazi isotropi massimali hanno dim 2 (vettoriali).

Si tratta di una quadrica rigata,
 nello spazio affine $X_0 \neq 0$ otteniamo $G_{10} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ degenera,
 dunque si tratta di una paraboloide iperbolico.

② L'esistenza $\mathcal{S}$ è fissata dalle coniche di vertice

poligono P_0 per $tp(010)$
 $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 dunque è un sistema lineare,
 d'insieme prefissa 2 (vettoriale 3),
 contiene coniche degeneri: $\Delta^2 C = 0$
 dunque per $a=0$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$ un fascio di coniche doppi (doppio)
 per $c=0$: $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ un fascio di coniche degeneri
 ed è generato da coniche degeneri.

Le coniche doppi hanno vertici del tipo
 (coefficienti d'equazione):

$\begin{pmatrix} -b^2 & -2c & 2b \\ -2c & 0 & 0 \\ 2b & 0 & -2c \end{pmatrix}$ da cui è un sistema lineare:
 $\begin{cases} X_{00} = -b^2 \\ X_{01} = -2c \\ X_{02} = 2b \\ X_{11} = 0 \\ X_{12} = 0 \\ X_{22} = -c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{11} = 0 \\ X_{12} = 0 \\ X_{00}X_{22} = X_{02}^2 \end{cases}$

e sono le coniche aventi una fissata tangente in un
 fissato punto, e aventi come tangente un'altra fissata retta,
 senza fissare il punto di tangenza.

④ E caso, supponiamo vertice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
 e sia $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$ l'equazione della conica
 non degenera in $X_0=0$ (conge del vertice)

dunque le rette in $\mathcal{E}$ sono quelle che intersecano con

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ con $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$,

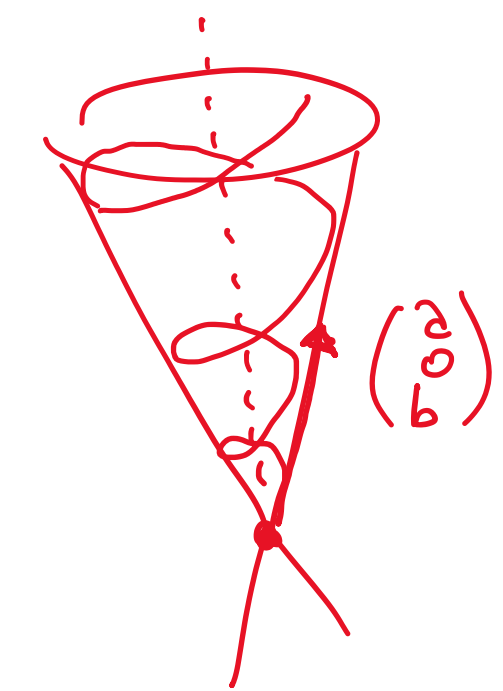
e le loro coordinate plückeriane sono

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$,

dunque abbiamo $\begin{cases} p_{11}^2 + p_{12}^2 + p_{13}^2 = 0 \\ p_{11} = 0 \\ p_{12} = 0 \\ p_{13} = 0 \end{cases}$ (conica nel piano sotto specificato)
 fissano su $\mathbb{P}^5$ tutto contenuto
 nella q . K.Cari.

Non è il unico caso possibile: qui abbiamo un fascio
 formato dai punti di $\mathbb{P}^5$ corrispondenti alle rette di una
 stella (di cui quella del caso sopra un sottosistema);
 vi sono anche fasci di $\mathbb{P}^5$ generati dai punti di $\mathbb{P}^5$
 corrispondenti alle rette di un piano di $\mathbb{P}^3$, e le rette
 tangenti a una conica in quel piano formano una conica.

③ $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a e^{ct} \cos t \\ a e^{ct} \sin t \\ b e^{ct} \end{pmatrix}$ $\gamma' = \begin{pmatrix} a e^{ct} (\cos t - \sin t) \\ a e^{ct} (\sin t + \cos t) \\ b e^{ct} \end{pmatrix}$ $\gamma'' = \begin{pmatrix} a e^{ct} (-2 \sin t) \\ a e^{ct} (2 \cos t) \\ b e^{ct} \end{pmatrix}$ $\gamma''' = \begin{pmatrix} a e^{ct} (2 \cos t - 2 \sin t) \\ a e^{ct} (2 \sin t + 2 \cos t) \\ b e^{ct} \end{pmatrix}$



$\begin{cases} \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = \frac{Z^2}{b^2} \\ Y=0 \\ \frac{X^2}{a^2} = \frac{Z^2}{b^2} \end{cases}$

$\|\gamma'\| = e^{ct} \sqrt{2a^2 + b^2}$

$\gamma' \times \gamma'' = \begin{pmatrix} ab e^{2t} (\sin t - \cos t) \\ -ab e^{2t} (\cos t + \sin t) \\ a^2 e^{2t} (2) \end{pmatrix}$

$\|\gamma' \times \gamma''\| = a e^{2t} \sqrt{2b^2 + 4a^2} = a e^{2t} \sqrt{2} \sqrt{2a^2 + b^2}$

$K = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{a e^{2t} \sqrt{2} \sqrt{2a^2 + b^2}}{e^{3t} \sqrt{2a^2 + b^2}^3} = \frac{a \sqrt{2}}{e^t (2a^2 + b^2)}$

$\tau_K = \frac{b}{e^t (2a^2 + b^2)} \cdot \frac{e^t (2a^2 + b^2)}{a \sqrt{2}} = \frac{b}{a \sqrt{2}}$ dunque si tratta di una elica!

si può anche trovare il parametro d'arco

$s(t) = \int \|\gamma'\| dt = \int e^{ct} \sqrt{2a^2 + b^2} dt = \sqrt{2a^2 + b^2} e^t$

dunque $t = \log \frac{s}{\sqrt{2a^2 + b^2}}$

e riparametrizzare la curva.

In particolare, se K e τ sono universalmente
 proporzionali al parametro d'arco: questo dovrebbe
 caratterizzare le eliche coniche tra le eliche (generalmente)?

La curva γ sta sulla superficie di un cono d'apertezza,
 vertice nell'origine,
 con asse di direzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e generatrice d'orientazione $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$:

ampolo ha $\gamma=0$ e asse: $\begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (costante)

ampolo ha γ' e generatrici (della curva): $\begin{pmatrix} a(\cos t - \sin t) \\ a(\sin t + \cos t) \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2a^2 + b^2}{\sqrt{2a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
 $= \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2} + 1}$ (costante)

ma anche γ' e asse: $\begin{pmatrix} a(\cos t - \sin t) \\ a(\sin t + \cos t) \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{b}{\sqrt{2a^2 + b^2}}$ (costante)

(questa è una proprietà generale delle eliche)

Viceversa, supponiamo che $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ sia tale che
 $(\gamma-0)$ formi angolo costante con $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 γ' formi angolo costante con $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

allora $\frac{\gamma \cdot v}{\|\gamma\|} = c \Rightarrow z^2 = c^2 (x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1-c^2}{c^2} z^2 = \frac{1-c^2}{c^2} d^2 t^2$

$\frac{\gamma' \cdot v}{\|\gamma'\|} = d \Rightarrow z' = d \Rightarrow z = dt$
 dunque $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{c} \sqrt{1-c^2} \cos \theta(t) \\ \frac{d}{c} \sqrt{1-c^2} \sin \theta(t) \\ dt \end{pmatrix}$, $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{c} \sqrt{1-c^2} (-\sin \theta(t)) - t \theta' \sin \theta(t) \\ \frac{d}{c} \sqrt{1-c^2} (\cos \theta(t)) + t \theta' \cos \theta(t) \\ d \end{pmatrix}$

e imponiamo $\|\gamma'\| = 1$, viene:

$\frac{d^2}{c^2} (1-c^2) (1 + (t \theta')^2) + d^2 = 1$

cioè $(t \theta')^2 = \frac{1-d^2}{1-c^2} \frac{c^2}{d^2} - 1 = \frac{c^2 - d^2}{1-c^2} \frac{1}{d^2}$

$t \theta' = \frac{1}{d} \frac{\sqrt{c^2 - d^2}}{\sqrt{1-c^2}} \Rightarrow \theta' = \frac{1}{d} \frac{\sqrt{c^2 - d^2}}{\sqrt{1-c^2}} \frac{1}{t}$

$\theta = \frac{1}{d} \frac{\sqrt{c^2 - d^2}}{\sqrt{1-c^2}} \log t$

dunque $\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{d}{c} \sqrt{1-c^2} e^{\frac{d \sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2 - d^2}} \theta} \cos \theta \\ \frac{d}{c} \sqrt{1-c^2} e^{\frac{d \sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2 - d^2}} \theta} \sin \theta \\ d e^{\frac{d \sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2 - d^2}} \theta} \end{pmatrix}$ $t = e^{\frac{d \sqrt{1-c^2}}{\sqrt{c^2 - d^2}} \theta}$

che corrisponde ad una elica conica.