primo appello Geometria 2 parte A - 28 gennaio 2026

Vanno consegnati: questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento (leggibile e ben giustificato) degli esercizi.

Riportare i seguenti dati anche sui fogli protocollo con lo svolgimento:

Cognome: _______________ **Nome:** _______________ **Matricola:** ________

Testo del compito:

Esercizio 1. Sia data la seguente forma quadratica di $\mathbb{R}^4$:

$$Q(X) = X_0^2 + X_0X_1 - 2X_1X_2 + 2X_1X_3 - X_2^2 + X_3^2 \ .$$

(a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(b) Classificare proiettivamente e affinemente la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e rette eventualmente complesse contenute in $\mathcal{Q}$.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\mathcal{S}$ formato dalle coniche del piano proiettivo che sono tangenti alla retta $X_1 = 0$ nel punto P_0 e passanti per il punto P_1 nel riferimento dato.

(a) Mostrare che si tratta di un sistema lineare di coniche di dimensione (proiettiva) 2, e determinare tutte le coniche degeneri del sistema. È vero che il sistema $\mathcal{S}$ è generato da coniche degeneri?

(b) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del sistema $\mathcal{S}$. Dire se tale insieme costituisce un sistema lineare di coniche del piano duale, e in ogni caso caratterizzare questo insieme tramite condizioni geometriche.

Esercizio 3. Consideriamo la curva nello spazio con parametrizzazione

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} ae^t \cos t \\ ae^t \sin t \\ be^t \end{pmatrix}$$

con a, b costanti positive (elica conica).

(1) determinare curvatura e torsione della curva;

(2) come si possono caratterizzare queste curve con i dati del punto precedente?

(3) come si possono caratterizzare queste curve geometricamente? *[sugg.: stanno su un cono di rotazione, e il loro vettore tangente ...]*;

Esercizio 4. Sia $\mathcal{C}$ un cono di vertice un punto di $\mathbb{P}^3(\mathbb{k})$, e sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle rette contenute in $\mathcal{C}$. Sia Φ l'immersione di Plucker (delle rette di $\mathbb{P}^3(\mathbb{k})$ in $\mathbb{P}^5(\mathbb{k})$). Mostrare che $\Phi(\mathcal{S})$ è una conica non degenere contenuta in un piano contenuto nella quadrica di Klein. È vero, viceversa, che ogni conica non degenere contenuta in un piano contenuto nella quadrica di Klein corrisponde alle rette contenute in un cono di $\mathbb{P}^3(\mathbb{k})$?