

- ③ (1) $\tau \geq$ topologia connumerabile su X
(chiusi $\equiv$ insiemi finiti o numerabili, oltre ex
operti $\equiv$ complementari, oltre a $\emptyset$)
- (2) τ anticompatto $\equiv$ i compatti sono i sottoinsiemi finiti
- (3) τ tot. arco conn $\equiv$ le corp. arco connesse sono i punti
(gli unici conniventi continui
sono quelli costanti)

Sei esempi proposti danno:

	$\geq$ conum.	anticomp.	TAS
$(\mathbb{Q}, \text{usuale})$	/	/	$\checkmark$
$(\mathbb{R}, \geq 0)$	/	$\checkmark$	/
top. discrete	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
top. bound.	/	/	/

- ③ (1) $\Rightarrow$ (2) può se A insieme infinito,
 $A \geq$ denso $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$
numerabile
e $U_i := X \setminus \{a_1, \dots, a_n, \dots\} \cup \{a_i\}$
sono operti (connumerabili)
ricoprimento di A
non raff.abile,
quindi A non è compatto,
solo i finiti sono compatti.

Alternative: $\leftarrow$ altro
 $A_i := \{a_1, a_2, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n, \dots\}$
Sono chiusi: con $n = \emptyset$
ma nessuno sottoinsieme finito
ha $n = \emptyset$.

viceversa è falso, visto $(\mathbb{R}, \geq 0)$

- ③ (1) $\Rightarrow$ (3) da (1) abbiamo compatti = finiti,
ma anche da la top. usuale sui finiti
è quella discreta (su tutti i numerabili,
in realtà).
ora $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ continua
riifica $[0, 1]$ compatto $\Rightarrow \gamma([0, 1])$ compatto
finito, discreto
 $[0, 1]$ connesso $\Rightarrow \gamma$ costante
tutti i continui continui sono costanti,
dunque TAS.

il viceversa è falso visto $(\mathbb{Q}, \text{usuale})$.

- ③ i due controesempi di prima, visibili con
top. bound. e discrete (su insiemi non bound.)
mostano che non c'è relazione tra (2) e (3).
nonmeno (2), (3) visibili implicano (1)?

note: l'esempio $(\mathbb{Q}, \text{usuale})$ è tot. conn.,
ma $(\mathbb{R}, \text{connumerabile})$ è connesso e TAS.

- ② $X = [0, 1]^{\mathbb{Z}} = \{\mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]\}$
- ③ $\tau =$ topologia prodotto su X
essendo prodotto numerabile di spaz. metrici,
 τ è pseudometrizzabile, quindi $C1$, e $C2$ anche sep
(prodotto numerabile di separabili)
è $T2$ e $wnuole$ (sp. metrico)
è connesso x oculi (anche localm.)
è compatto (prodotto compatti) -

per la β possiamo dedurre $T2$, ma non altro da τ .
(in effetti β è anche $wnuole$, una usche oltre ipotesi notevoli.)

- ③ intorni della $0: \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]$ sono $\prod_{i \in \mathbb{Z}} U_i$ con U_i intorno di 0 in $[0, 1]$
e possi. tolti $= [0, 1]$ nel caso τ .
esistono successioni $f_n \rightarrow 0$ per τ (basta $f_n(i) = 1/n$ per es.)
ma non per β perché se le f_n non si annullano mai
si può trovare un intorno di 0 per β a cui
non appartengono.
unicamente per τ esistono tali reti (ad es. le successioni!),
ma anche per β : basta usare $A =$ intorni di 0 con ordine =
controinduzione
e per ogni intorno scegliere una funzione mai
nulla in quell'intorno
allora la rete $(U_i, f_i) \mapsto f_i$
converge puntualmente a 0 .

- ③ $N = \{f: \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1] \text{ g.o. nulle, con } f(i) = 0 \text{ tranne}$
 $\text{per un numero finito } i \in \mathbb{Z}\} \subseteq X$
 $N^\circ \beta = \emptyset = N^\circ \tau$ (in ogni intorno di tali f visibili funzioni
oode (fini nulle))
 $\overline{N}^\tau = X$ perché in ogni intorno di f si possono trovare
una quasi ovunque 0
 $\overline{N}^\beta = N$ perché le complementari e β -aperti: se una funzione
non si annulla in un indice, posso trovare un intorno
di funzioni che non si annullano su quell'indice.

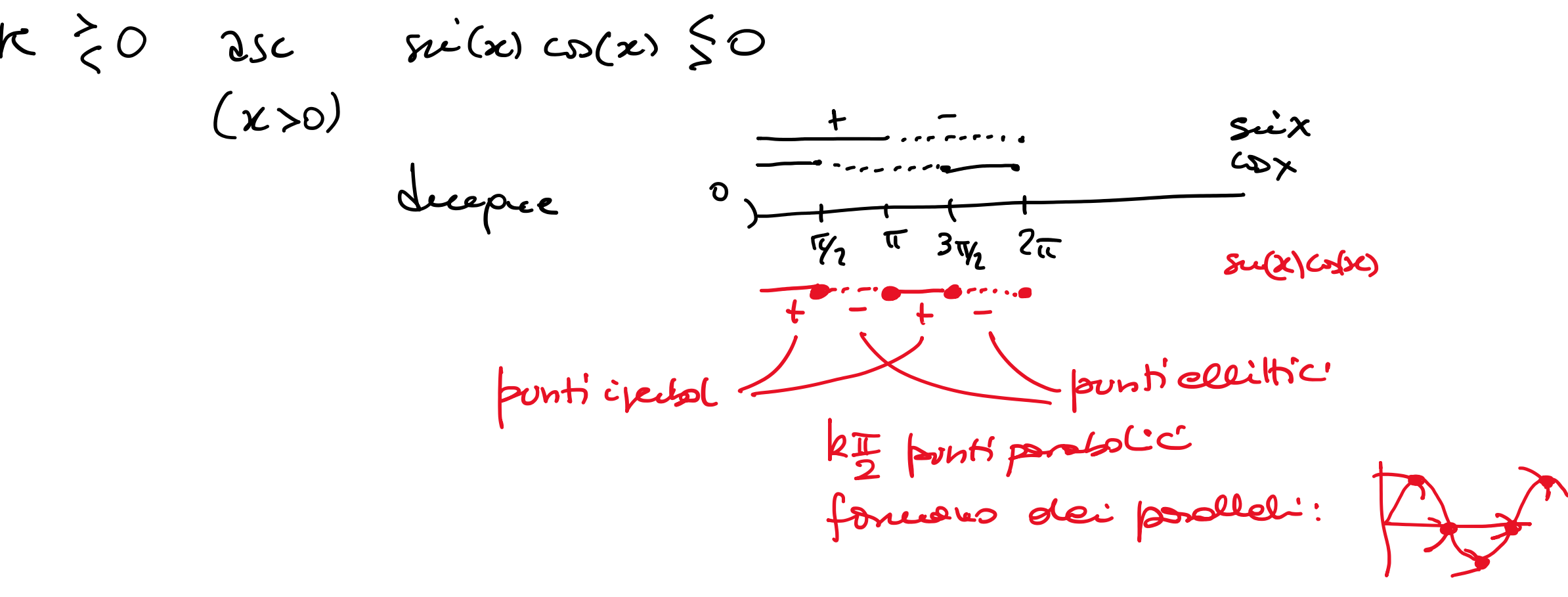
- ③ $A = \{\mathbb{Z} \rightarrow (0, 1)\} = (0, 1)^{\mathbb{Z}}$
 $N^\circ \tau = \emptyset$ (non contiene alcun aperto di τ)
 $N^\circ \beta = N$ (è prodotto di aperti!)
 $\overline{N}^\beta = X = \overline{N}^\tau$

- ③ $B = \{\mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}\} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$
 $N^\circ \beta = \emptyset = N^\circ \tau$
 $\overline{N}^\tau = N = \overline{N}^\beta$

① $z = \sin x \quad \sigma(x, \vartheta) = \begin{pmatrix} x \sin \vartheta \\ x \cos \vartheta \\ \sin(x) \end{pmatrix}$
 $\sigma_x = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \\ \cos x \end{pmatrix} \quad \sigma_{\vartheta} = \begin{pmatrix} x \cos \vartheta \\ -x \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_x \sigma_{\vartheta} = \begin{pmatrix} +x \cos x \sin \vartheta \\ x \cos x \cos \vartheta \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \sin \vartheta \\ \cos x \cos \vartheta \\ -1 \end{pmatrix}$
 $\sigma_{xx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin x \end{pmatrix} \quad \sigma_{x\vartheta} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \begin{pmatrix} -x \sin \vartheta \\ -x \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$

da cui otteniamo
 $G_I = \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 x & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \quad G_{II} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \begin{pmatrix} \sin x & 0 \\ 0 & -x \cos x \end{pmatrix}$
 $L = G_I^{-1} G_{II} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \begin{pmatrix} \sin x / (1 + \cos^2 x) & 0 \\ 0 & -\cos x / x \end{pmatrix}$

$K = \frac{|G_{II}|}{|G_I|} = \frac{-x \sin(x) \cos(x)}{x^2 (1 + \cos^2 x)^2} = -\frac{\sin(x) \cos(x)}{x(1 + \cos^2 x)^2}$



linee di curvatura sono quelle casualiste delle proiezioni, perché L è già disponibile.
le linee asintotiche sono quelle i cui vettori tangenziali $\begin{pmatrix} x' \\ \vartheta' \end{pmatrix}$
sono isotropi per G_{II} , cioè
 $x'^2 \sin(x) - \vartheta'^2 x \cos(x) = 0$
 $\left(\frac{\vartheta'}{x}\right)^2 = \frac{\sin(x)}{x \cos(x)}$
dunque per $\sin(x) = 0$ abbiamo $\vartheta' = 0$ (sono linee paraboliche,
ma le linee paraboliche con $\cos(x) = 0$
non sono asintotiche...)

Il sist. diff. delle geodetiche è
 $\begin{cases} ((1 + \cos^2 x) x')' = \frac{1}{2} (-2 \cos x \sin x x'^2 + 2x \vartheta'^2) \\ (x^2 \vartheta')' = 0 \end{cases}$
e equazione caratteristica è $(1 + \cos^2 x) x'^2 + x^2 \vartheta'^2 = 1$

e parte le soluzioni note (meridiani $\vartheta' = 0$
paralleli $x' = 0$)

possiamo ricavare $x^2 \vartheta' = c$ (costante)
 $\vartheta' = \frac{c}{x^2}$
più $(1 + \cos^2 x) x'^2 + x^2 \left(\frac{c}{x^2}\right)^2 = 1$
 $x'^2 = \frac{1 - \frac{c^2}{x^2}}{1 + \cos^2 x}$

e infine l'espressione $\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{\vartheta'}{x'} = \frac{c/x^2}{\sqrt{(1 - c^2/x^2)(1 + \cos^2 x)}}$