primo appello Geometria 2 parte B - 25 giugno 2025

Vanno consegnati: questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento (leggibile e ben giustificato) degli esercizi.

Riportare i seguenti dati anche sui fogli protocollo con lo svolgimento:

Cognome: _______________ **Nome:** _______________ **Matricola:** ________

Testo del compito:

Esercizio 1. Si consideri la superficie ottenuta ruotando il profilo $z = \sin x$ con $x > 0$ (nel piano x, z) attorno all'asse delle z.

(a) Scrivere una parametrizzazione σ e una equazione cartesiana per la superficie.
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, la curvatura K di σ, e determinare il tipo dei punti su σ. Determinare le curve formate dai punti parabolici.
(d) Determinare le linee di curvatura su σ, e le linee asintotiche di σ.
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; ridurre il sistema ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine.

Esercizio 2. Sull'insieme $X = [0,1]^{\mathbb{Z}}$ (dove $[0,1]$ è dotato della topologia euclidea usuale indotta da $\mathbb{R}$) consideriamo la topologia prodotto τ e la box-topology β (generata dai prodotti di aperti).

(a) Elencare le proprietà di numerabilità, separazione, connessione e compattezza per X dotato della topologia τ. Che cosa si può dedurre da questo per β?
(b) Descrivere gli intorni della funzione nulla per τ e per β; esistono successioni di funzioni mai nulle in X che convergono per τ e/o per β alla funzione nulla? esistono reti di funzioni mai nulle in X che convergono per τ e/o per β alla funzione nulla?
(c) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme delle funzioni quasi ovunque nulle.
(d) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme $(0,1)^{\mathbb{Z}}$.
(e) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico, τ la topologia. Consideriemo le seguenti proprietà:

(1) la topologia τ contiene la topologia conumerabile su X;
(2) X è anticompatto, cioè gli insiemi compatti sono solo quelli finiti;
(3) X è "totalmente arco-sconnesso", cioè le componenti arco-connesse sono i punti.

(a) mostrare che (1) implica (2), e che il viceversa è falso;
(b) mostrare che (1) implica (3), e che il viceversa è falso;
(c) mostrare che non vi è alcuna relazione tra (2) e (3).

Sugg.: si considerino come esempi $\mathbb{Q}$ con topologia usuale, $\mathbb{R}$ con la topologia includente di 0, topologie discrete e banali.