A1R-G2A-2025-s

lunedì 26 gennaio 2026 15:34

(1) $Q(X) = x_0^2 + 2x_0x_2 - x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3 + x_3^2$, matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

$= (x_0 + x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2 + \underbrace{(x_2 + x_3)x_3}_{\text{prodotto = diff. quadr.}}$

sgn $(2,2)$

rg 4

base ortogonale e_0, e_1, e_3, $v \in \langle e_0, e_1, e_3 \rangle^{\perp} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ di forma $-1 < 0$.

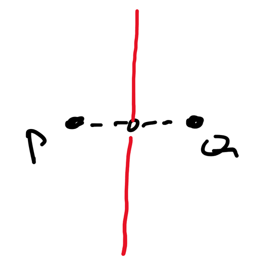
E' quadrica rigata di $\mathbb{P}^3$,

nello spazio affine $x_0 \neq 0$ è iperboloide (iperbolico perché rigato)

(4) supponiamo che i punti abbiano coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = P$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = Q$

(possibile con una scelta di rif. ortonormale, ovvero con una isometria):

<u>caso euclideo</u>: i punti equidistanti sono quelli dell'asse del segmento:

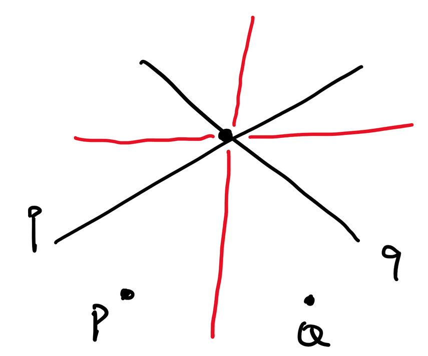


$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tali che $(x_1 - a)^2 + x_2^2 = (x_1 + a)^2 + x_2^2$

cioè $x_1 = 0$.

<u>caso ellittico</u>: i punti equidistanti sono gli X per cui

$$\frac{\Omega(X,P)^2}{\Omega(X)\,\Omega(P)} = \frac{\Omega(X,Q)^2}{\Omega(X)\,\Omega(Q)}$$



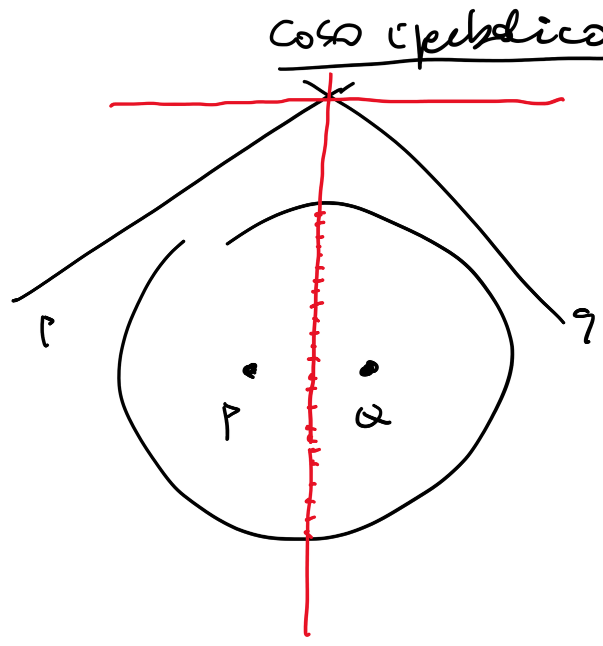
cioè

$$\Omega(Q)\,\Omega(X,P)^2 - \Omega(P)\,\Omega(X,Q)^2 = 0$$

$$\left(\sqrt{\Omega Q}\,\Omega(X,P) + \sqrt{\Omega P}\,\Omega(X,Q)\right)\left(\sqrt{\Omega Q}\,\Omega(X,P) - \sqrt{\Omega P}\,\Omega(X,Q)\right) = 0$$

quindi sono i punti appartenenti a 2 rette, combinazioni con coeff $\sqrt{\Omega Q}$, $\pm\sqrt{\Omega P}$ delle polari $\Omega(X,P)$, $\Omega(X,Q)$ dei due punti: BISETTRICI (in senso ellittico) delle polari (sono 2 rette ortogonali tra loro).

<u>caso iperbolico</u>: i conti sono circa quelli del caso ellittico, facendo attenzione ai segni (e alle $\sqrt{\ }$), ma i punti essendo interni, le polari sono esterne, quindi solo una delle due bisettrici ha punti nel piano iperbolico.



Nota: il caso euclideo si può riconoscere come "limite" degli altri (dove si trovano due rette come soluzione) pensando che nel piattino la soluzione $x_1 = 0$ viene da equazioni di 2° grado, quindi $x_0 x_1 = 0$ (la seconda retta di punti equidistanti sarebbe quella all'infinito!)

Nota: anche nei casi ellittico/iperbolico si possono fare i conti esplicitamente in coordinate.

(2) supponiamo i tre punti fondamentali di passaggio, quindi matrici delle coniche sono

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

chiaramente sistema lineare di dim proiettiva 2, le coniche degeneri sono quelle con $abc = 0$, quindi ve ne sono 3 fasci:

$a=0$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$, $b=0$: $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$, $c=0$: $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L'insieme delle coniche duali soddisfa a 3 condizioni di tangenza senza fissare i punti di tangenza, quindi non ci aspettiamo un sistema lineare ma una intersezione di 3 quadriche (coni) in $\mathbb{P}^5$: matrici (complementi algebrici):

$$\begin{pmatrix} -c^2 & bc & ac \\ bc & -b^2 & ab \\ ac & ab & -a^2 \end{pmatrix}$$ ovvero parametrizzazione $\begin{cases} X_{00} = -c^2 \\ X_{01} = bc \\ X_{02} = ac \\ X_{11} = -b^2 \\ X_{12} = ab \\ X_{22} = -a^2 \end{cases}$

ed eliminando i parametri otteniamo $\begin{cases} X_{00}X_{11} = X_{01}^2 \\ X_{00}X_{22} = X_{02}^2 \\ X_{11}X_{22} = X_{12}^2 \end{cases}$

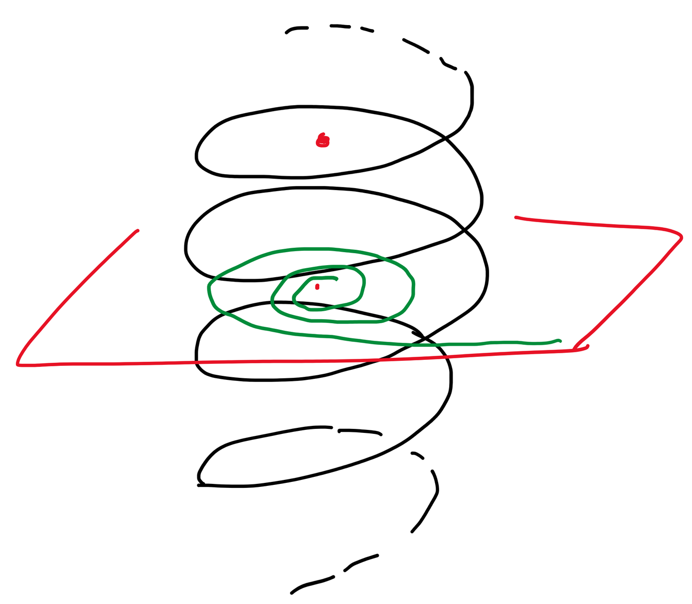
(intersezione di quadriche, in effetti 3 coni, in $\mathbb{P}^5$).

(3) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\frac{\cos t}{t} \\ a\frac{\sin t}{t} \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \cos t/t \\ \sin t/t \end{pmatrix}$

$\gamma' = a\begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2}\cos t - \frac{1}{t}\sin t \\ -\frac{1}{t^2}\sin t + \frac{1}{t}\cos t \end{pmatrix}$ $\quad \gamma'' = a\begin{pmatrix} \frac{2}{t^3}\cos t + \frac{2}{t^2}\sin t - \frac{1}{t}\cos t \\ \frac{2}{t^3}\sin t - \frac{2}{t^2}\cos t - \frac{1}{t}\sin t \end{pmatrix}$

$\|\gamma'\| = a\sqrt{\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2}} = \frac{a}{t^2}\sqrt{1+t^2}$

$|\gamma'\gamma''| = a^2 \begin{vmatrix} -\frac{ct}{t^2} - \frac{st}{t} & -\frac{ct}{t} \\ -\frac{st}{t^2} + \frac{ct}{t} & -\frac{st}{t} \end{vmatrix} = a^2(1/t^2)$



$$\kappa = \frac{|\gamma'\gamma''|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{a^2/t^2}{a^3\sqrt{1+t^2}^3/t^6} = \frac{t^4}{a\sqrt{1+t^2}^3}$$

(da qui possiamo ricavare t come funzione di a, κ?)

$$s(t) \overset{!}{=} \int \|\gamma'\|\,dt = \int \frac{a}{t^2}\sqrt{1+t^2}\,dt = a\int \frac{\mathrm{ch}^2\vartheta}{\mathrm{sh}^2\vartheta}\,d\vartheta = a\int \left(1 + \frac{1}{\mathrm{sh}^2\vartheta}\right)d\vartheta$$

$t = \mathrm{sh}\,\vartheta$

$dt = \mathrm{ch}\,\vartheta\,d\vartheta$

$$= a\left(\vartheta + \int \frac{d\vartheta}{\mathrm{sh}^2\vartheta}\right)$$

$$= a\left(\vartheta - \frac{\mathrm{ch}\,\vartheta}{\mathrm{sh}\,\vartheta}\right) = a\left(\mathrm{settsh}\,t - \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\right)$$

$$= a\left(\log(t + \sqrt{1+t^2}) - \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\right)$$

$\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lim_{t\to 0} \gamma(t) = \begin{pmatrix} +\infty \\ 1^- \end{pmatrix}$ (asintoto)

$\Rightarrow \int_1^{\infty} \|\gamma'\|\,dt = \infty$

(lunghezza da un punto al polo)

Usiamo l'elica cilindrica $\begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}$,

punto di proiezione: origine,

piano di proiezione $z = 1$,

allora $\lambda bt = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{bt}$

e la proiezione è $\lambda\begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix} = \frac{1}{bt}\begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{b}\frac{\cos t}{t} \\ \frac{a}{b}\frac{\sin t}{t} \\ 1 \end{pmatrix}$

dunque sul piano $z=1$ è una spirale iperbolica