(3) γ regolare unitaria $\subseteq \mathbb{R}^3$
t, n, b rif. Frenet, $(t'\, n'\, b') = (t\, n\, b)\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$

$\delta(s)$: $\delta'(s) = t(s) + b(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\delta'' = t' + b' = kn - \tau n = (k-\tau)n = \begin{pmatrix} 0 \\ k-\tau \\ 0 \end{pmatrix}$

$\delta''' = (k'-\tau')n + (k-\tau)n' =$
$= -k(k-\tau)t + (k'-\tau')n + \tau(k-\tau)b = \begin{pmatrix} -k(k-\tau) \\ k'-\tau' \\ \tau(k-\tau) \end{pmatrix}$

dunque $\|\delta'\| = \sqrt{2}$

$$k_\delta = \frac{\|\delta' \times \delta''\|}{\|\delta'\|^3} = \frac{\sqrt{2}\,|(k-\tau)|}{\sqrt{2}^3} = \frac{k-\tau}{2}$$

$$\tau_\delta = \frac{|\delta'\,\delta''\,\delta'''|}{\|\delta' \times \delta''\|^2} = \frac{(k-\tau)^2(k+\tau)}{2|k-\tau|^2} = \frac{k+\tau}{2}$$

Serve che $k-\tau \neq 0$ per regolarità di δ,
δ piana sse $k_\delta = 0$ ($k=\tau$, allora $\delta''=0 \dots$) oppure $k_\delta \neq 0$ e $\tau_\delta = 0$
($k+\tau=0$,
$k=-\tau$,
$k/\tau = -1$ sono
<u>certe</u> eliche ...)

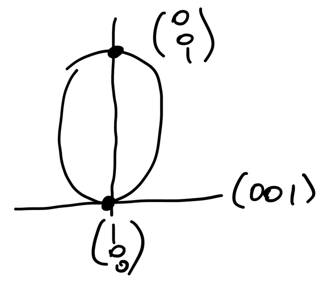
$t_\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}(t+b)$
$n_\delta = \pm n$
$\pm b_\delta = t_\delta \times n_\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}(t-b)$

(1) tutto standard:

$Q(x) = x_0^2 - x_1^2 + x_0x_2 - x_1x_3$
$= x_0(x_0+x_2) - x_1(x_1+x_3)$
è di segnatura $(2,2)$

Proiettivamente è quadrica rigata
Affinemente in $x_0 \neq 0$ è paraboloide iperbolico ~

(2) come fascio osculatore possiamo prendere



con matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & \mu \\ -\lambda & \mu & 0 \end{pmatrix} = A(\lambda\mu)$

- cerchiamo $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tali che $P^t A(\lambda\mu)$ polare è indipendente da $\lambda\mu$:

$$(x_0\, x_1\, x_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & \mu \\ -\lambda & \mu & 0 \end{pmatrix} = \lambda(-x_2, x_1, -x_0) + \mu(0, x_2, x_1)$$

che è indip. da λ, μ sse
$rg\begin{pmatrix} -x_2 & x_1 & x_0 \\ 0 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = 1$
sse $x_1 = x_2 = 0$ cioè $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
dunque vi è un solo punto a polare costante,
che è quello comune di tangenza/osculazione

- fissata una retta $a = (a_0\, a_1\, a_2)$ del piano,
i suoi poli si trovano con

$$A(\lambda\mu)^{-1} a^t \doteq \begin{pmatrix} -\mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ -\lambda\mu & -\lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$
$$= \lambda^2\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} + \lambda\mu\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu^2\begin{pmatrix} -a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a prioi combinazioni quadratiche di λ, μ, quindi
conica in generale non degenere, a meno che i
3 punti non siano allineati, ovvero $\det\begin{pmatrix} a_2 & -a_1 & -a_0 \\ -a_1 & a_0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$,
cioè per $a_0^3 = 0$, cioè per $a = (0\, a_1\, a_2)$
rette del fascio per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

per tali rette $a = (0, a_1, a_2)$ i poli sono su $\left\langle \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

(se $a_1 \neq 0$, per $(0, 0, a_2) = (0, 0, 1)$
troviamo giustamente un punto!)

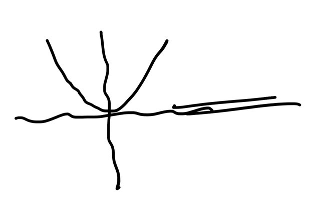
Dalla parametrizzazione $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & -a_1 & -a_0 \\ -a_1 & -a_0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda\mu \\ \mu^2 \end{pmatrix}$

otteniamo $\begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda\mu \\ \mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0^2 \\ 0 & a_0^2 & -a_0a_1 \\ a_0^2 & -a_0a_1 & -a_0a_2 - a_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^2x_2 \\ a_0^2x_1 - a_0a_1x_2 \\ a_0^2x_0 - a_0a_1x_1 - (a_0a_2 + a_1^2)x_2 \end{pmatrix}$

e da $\lambda^2\mu^2 = (\lambda\mu)^2$
ottieniamo $a_0^2x_2\,(a_0^2x_0 - a_0a_1x_1 - (a_0a_2 + a_1^2)x_2) = a_0^2(a_0x_1 - a_1x_2)^2$
quindi $a_0^2x_0x_2 - a_0a_1x_1x_2 - (a_0a_2 + a_1^2)x_2^2 = a_0^2x_1^2 - 2a_0a_1x_1x_2 + a_1^2x_2^2$

di matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0^2/2 \\ 0 & -a_0^2 & a_0a_1/2 \\ & & -a_0a_2 - 2a_1^2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & a/2 \\ 0 & -a & b/2 \\ a/2 & b/2 & c \end{pmatrix}$

che quindi dà un sistema lineare generato
da $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$2x_0x_2 = x_1^2 \qquad x_1x_2 \qquad x_2^2$



tutte $\ni \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
tutte sono ivi tg a $(0\,0\,1)$
e ivi osculatrici a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

- le coniche duali sono descritte dalle matrici
$\begin{pmatrix} -\mu^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 \\ -\lambda\mu & -\lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

combinazione $\lambda^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda\mu\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu^2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

chiaramente 3 punti non allineati nel $\mathbb{P}^5$ delle coniche
(matrici simmetriche), quindi formano una
conica (nel $\mathbb{P}^5$ delle coniche):
$$\begin{cases} x_{00} = -\mu^2 \\ x_{01} = -\lambda\mu \\ x_{02} = \lambda^2 \\ x_{11} = -\lambda^2 \\ x_{12} = 0 \\ x_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{00}x_{11} = x_{01}^2 \\ x_{02} = -x_{11} \\ x_{12} = 0 \\ x_{22} = 0 \end{cases} \text{piano} \subseteq \mathbb{P}^5$$

data dalle coniche di $\mathbb{P}^{2*}$
che sono tg alla retta (001)
e alla retta (100) nel punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
dove sono osculatrici a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

infatti $\begin{pmatrix} -\mu^2 & -\lambda\mu & 0 \\ -\lambda\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \mu^2x_0^2 + \lambda\mu x_0x_1 = 0 \\ x_1^2 = x_0x_2 \end{cases}$ $\nearrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 = 0 \end{cases}$ $2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\searrow \begin{cases} \mu x_0 + \lambda x_1 = 0 \\ x_1^2 = x_0x_2 = -\frac{\lambda}{\mu}x_1x_2 \end{cases}$ $\nearrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\searrow$ ulteriore punto.

<u>NOTA</u>: la condizione di osculazione in un
fissato punto a una fissata conica non deg
dà una rete di coniche (sistema lineare
di dim 2):
conica $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dà matrice
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & \gamma \\ \alpha & \gamma & \delta \end{pmatrix}$ con $\alpha + \beta = 0$

dunque $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & \gamma \\ \alpha & \gamma & \delta \end{pmatrix}$

che ha duale $\doteq \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -\alpha & \gamma \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} & \alpha\gamma & \alpha^2 \\ \alpha\gamma & -\alpha^2 & 0 \\ \alpha^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} -\delta - \frac{\gamma^2}{\alpha} & \gamma & \alpha \\ \gamma & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\doteq \begin{pmatrix} \delta' & \gamma & \alpha \\ \gamma & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$

sistema lineare dello stesso tipo!