

secondo appello Geometria 2 parte A - 25 giugno 2025

Vanno consegnati: questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento (leggibile e ben giustificato) degli esercizi.

Riportare i seguenti dati anche sui fogli protocollo con lo svolgimento:

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____

Testo del compito:

Esercizio 1. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 - X_1^2 + X_0X_2 - X_1X_3$$

di \mathbb{R}^4 .

- (a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.
- (b) Classificare proiettivamente e affinemente la quadrica \mathcal{Q} di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e rette eventualmente complesse contenute in \mathcal{Q} .

Esercizio 2. Si consideri un fascio osculatore \mathcal{F} di coniche del piano proiettivo.

- (a) Determinare i punti del piano la cui polare è la stessa per tutte le coniche del fascio \mathcal{F} , e motivare geometricamente il risultato.
- (b) Per ogni retta t del piano mostrare che l'insieme dei suoi poli per le coniche del fascio \mathcal{F} in generale è una conica \mathcal{C}_t , e trovare le rette per cui tale conica è degenera. Determinare se l'insieme delle coniche \mathcal{C}_t è un sistema lineare, e in ogni caso caratterizzare questo insieme tramite condizioni geometriche.
- (c) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio \mathcal{F} . Dire se tale insieme costituisce un fascio di coniche del piano duale, e in ogni caso caratterizzare questo insieme tramite condizioni geometriche.

Esercizio 3. Sia γ una curva regolare unitaria nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , e siano t, n, b il suo riferimento di Frenet, κ, τ curvatura e torsione. Si consideri una curva $\delta(s)$ tale che $\delta'(s) = t(s) + b(s)$ cioè direzione definita dalla somma dei versori tangente e binormale di γ (s è il parametro d'arco di γ).

- (a) Determinare il sistema di riferimento di Frenet di δ in funzione di quello di γ .
- (b) Determinare la curvatura di δ in funzione di curvatura e torsione di γ .
- (c) Determinare la torsione di δ in funzione di curvatura e torsione di γ . In quali casi la curva δ risulta piana?