terzo appello Geometria 2 parte B - 25 agosto 2025

Vanno consegnati: questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento (leggibile e ben giustificato) degli esercizi.

Riportare i seguenti dati anche sui fogli protocollo con lo svolgimento:

Cognome: _______________ **Nome:** _______________ **Matricola:** ________

Testo del compito:

Esercizio 1. Si consideri la superficie ottenuta ruotando il profilo $z = x \sin x$ con $x > 0$ (nel piano x, z) attorno all'asse delle z.

(a) Scrivere una parametrizzazione σ e una equazione cartesiana per la superficie.
(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.
(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, la curvatura K di σ, e determinare il tipo dei punti su σ. Determinare le curve formate dai punti parabolici.
(d) Determinare le linee di curvatura su σ, e le linee asintotiche di σ.
(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; ridurre il sistema ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine.

Esercizio 2. Sull'insieme $X = \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ (dove $\mathbb{Q}$ è dotato della topologia usuale) consideriamo la topologia prodotto τ e la box-topology β (generata dai prodotti di aperti).

(a) Elencare le proprietà di numerabilità, separazione, connessione e compattezza per X dotato della topologia τ e della topologia β.
(b) Descrivere gli intorni della funzione nulla per τ e per β; esistono successioni di funzioni mai nulle in X che convergono per τ e/o per β alla funzione nulla?
(c) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme delle funzioni costanti.
(d) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme delle funzioni limitate.
(e) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme $(\mathbb{Q} \smallsetminus \mathbb{Z})^{\mathbb{Q}}$.

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico, τ la topologia. Consideriamo le seguenti proprietà:
(1) X è iperconnesso, cioè intersezione di aperti non vuoti è non vuota;
(2) X è ultraconnesso, cioè intersezione di chiusi non vuoti è non vuota;
(3) X è fortemente connesso, cioè ogni funzione continua $X \to \mathbb{R}$ è costante;
Mostrare che :
(a) iperconnesso implica fortemente connesso, e il viceversa è falso;
(b) ultraconnesso implica fortemente connesso, e il viceversa è falso;
(c) fortemente connesso implica connesso, e il viceversa è vero se X ha cardinalità minore di $\mathbb{R}$.
Sugg.: si considerino come esempi: $\mathbb{R}$ *con topologia usuale,* includente 0, escludente 0, *cofinita, conumerabile, cocompatta.*