(1) $Q(x) = -x_0^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$
$\quad = -x_0^2 + (x_1+x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2$

rg 4
sgn $(3,1)$ proiettivamente: quadrica non rigata, con punti reali
sgn$_\infty$ $(3,0)$ affinemente: non tangente $x_0=0$,
senza punti reali su $x_0=0$,
ellissoide con punti reali.

(2) Possiamo supporre che i 3 punti siano $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
e allora le matrici delle coniche richieste sono

$$\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta\\ \alpha&0&\gamma\\ \beta&\gamma&0\end{pmatrix} = \alpha\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A_1} + \beta\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}}_{A_2} + \gamma\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}_{A_3}$$

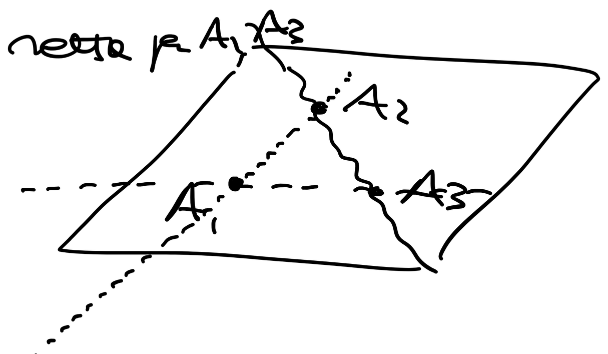
chiaramente un piano nel $\mathbb{P}^5$ delle coniche

$\det = 2\alpha\beta\gamma$, quindi degeneri solo per

$\alpha=0$: $\begin{pmatrix}0&0&\beta\\0&0&\gamma\\ \beta&\gamma&0\end{pmatrix}$ retta per A_2A_3

o $\beta=0$: $\begin{pmatrix}0&\alpha&0\\ \alpha&0&\gamma\\ 0&\gamma&0\end{pmatrix}$

o $\gamma=0$: $\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta\\ \alpha&0&0\\ \beta&0&0\end{pmatrix}$



Se $x = \begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}$, polari $(x_0\, x_1\, x_2)\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta\\ \alpha&0&\gamma\\ \beta&\gamma&0\end{pmatrix} =$

$= (\alpha x_1+\beta x_2,\ \alpha x_0+\gamma x_2,\ \beta x_0+\gamma x_1)$
$= \alpha(x_1, x_0, 0)$
$+\beta(x_2, 0, x_0)$
$+\gamma(0, x_2, x_1)$

Si tratta di tutto $(\mathbb{P}^2)^*$ se le tre righe sono lin. ind., altrimenti è

$$\det\begin{pmatrix}x_1&x_0&0\\x_2&0&x_0\\0&x_2&x_1\end{pmatrix}=0, \quad x_0x_1x_2=0$$

dunque per i punti degli assi coordinati otteniamo che le polari sono dei fasci di rette.
per es per $\begin{pmatrix}0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}$, è il fascio $\left\{\begin{matrix}(1\ 0\ 0)\\(0\ x_2\ x_1)\end{matrix}\right.$

centro $\begin{pmatrix}0\\x_1\\-x_2\end{pmatrix}$. (notare la proiezione armonica...)

L'insieme delle coniche duali ha matrice data dai complementi algebrici:

$$\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta\\ \alpha&0&\gamma\\ \beta&\gamma&0\end{pmatrix}^c = \begin{pmatrix}-\gamma^2&\beta\gamma&\alpha\gamma\\ \beta\gamma&-\beta^2&\alpha\beta\\ \alpha\gamma&\alpha\beta&-\alpha^2\end{pmatrix}$$

e nel $\mathbb{P}^5$ delle coniche duali si presenta come intersezione di quadriche:

$$\begin{cases}x_{00}=-\gamma^2\\ x_{01}=\beta\gamma\\ x_{02}=\alpha\gamma\\ x_{11}=-\beta^2\\ x_{12}=\alpha\beta\\ x_{22}=-\alpha^2\end{cases} \qquad \begin{cases}\begin{vmatrix}x_{00}&x_{01}\\x_{01}&x_{11}\end{vmatrix}=0\\[2mm] \begin{vmatrix}x_{00}&x_{02}\\x_{02}&x_{22}\end{vmatrix}=0\\[2mm] \begin{vmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{12}&x_{22}\end{vmatrix}=0\end{cases}$$

(ovvio, visto che è definito dalle condizioni di tangenza a 3 rette senza specificare il punto di tangenza)
e si vede che per $\alpha,\beta,\gamma\in\{0,1\}$ contiene 6 punti in posizione generale, quindi l'insieme genera tutto $\mathbb{P}^5$, e non è contenuto in nessun iperpiano.

(3) γ regolare unitaria, t, n, b rif Frénet
$\kappa\ \tau$ curvatura e torsione

$$(t', n', b') = (t, n, b)\begin{pmatrix}0&-\kappa&0\\ \kappa&0&-\tau\\ 0&\tau&0\end{pmatrix}$$

δ: $\delta' = t+n = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ nel rif mobile t, n, b

$\delta'' = t'+n'$
$\quad = \kappa n + (-\kappa t+\tau b) = \begin{pmatrix}-\kappa\\ \kappa\\ \tau\end{pmatrix}$ (nota: δ' ha $\|\delta'\|$ costante, dunque $\delta''\perp\delta'$)

$\delta''' = (-\kappa t+\kappa n+\tau b)' =$
$= -\kappa' t - \kappa t' + \kappa' n + \kappa n' + \tau' b + \tau b' =$
$= -\kappa' t - \kappa^2 n + \kappa' n + \kappa(-\kappa t+\tau b) + \tau' b + \tau(-\tau n) =$
$= \begin{pmatrix}-\kappa'-\kappa^2\\ \kappa'-\kappa^2-\tau^2\\ \tau'+\kappa\tau\end{pmatrix}$

$\|\delta'\| = \sqrt{2}$

$\delta'\times\delta'' = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\kappa\\ \kappa\\ \tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tau\\-\tau\\2\kappa\end{pmatrix}$

$t_\delta = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$n_\delta = \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}}\begin{pmatrix}-\kappa\\ \kappa\\ \tau\end{pmatrix}$

$b_\delta = \frac{1}{\sqrt2\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}}\begin{pmatrix}\tau\\-\tau\\2\kappa\end{pmatrix}$

$$\kappa_\delta = \frac{\|\delta'\times\delta''\|}{\|\delta'\|^3} = \frac{\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}}{2}$$

$$\tau_\delta = \frac{|\delta'\,\delta''\,\delta'''|}{\|\delta'\times\delta''\|^2} = \frac{\begin{vmatrix}1&-\kappa&-\kappa'-\cancel{\kappa^2}\\1&\kappa&\kappa'-\cancel{\kappa^2}-\tau^2\\0&\tau&\tau'+\kappa\tau\end{vmatrix}}{2(2\kappa^2+\tau^2)} = \frac{\begin{vmatrix}2\kappa&2\kappa'-\tau^2\\ \tau&\tau'+\kappa\tau\end{vmatrix}}{2(2\kappa^2+\tau^2)}$$

$$= \frac{2\kappa\tau' - 2\kappa'\tau + 2\kappa^2\tau + \tau^3}{2(2\kappa^2+\tau^2)}$$

$$= \frac{\kappa^2(\tau/\kappa)'}{2\kappa^2+\tau^2} + \frac{\tau}{2}$$

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \frac{\tau'\kappa - \tau\kappa'}{\kappa^2}$$