

quarto appello Geometria 2 parte A - 25 agosto 2025

Vanno consegnati: questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento (leggibile e ben giustificato) degli esercizi.

Riportare i seguenti dati anche sui fogli protocollo con lo svolgimento:

Cognome: \_\_\_\_\_ Nome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

**Testo del compito:**

**Esercizio 1.** Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = -X_0^2 + X_1^2 + 2X_1X_2 + 2X_2^2 + X_3^2$$

di  $\mathbb{R}^4$ .

- (a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.
- (b) Classificare proiettivamente e affinemente la quadrica  $\mathcal{Q}$  di  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  di equazione  $Q(X) = 0$ , determinando in particolare centro e rette eventualmente complesse contenute in  $\mathcal{Q}$ .

**Esercizio 2.** Consideriamo l'insieme delle coniche del piano proiettivo passanti per tre fissati punti in posizione generale.

- (a) Mostrare che si tratta di un sistema lineare di coniche, scrivendone una matrice in un riferimento scelto; quali sono le coniche degeneri contenute in questo insieme?
- (b) Per ogni punto del piano consideriamo l'insieme delle polari rispetto alle coniche date. Determinare per quali punti l'insieme delle polari è un fascio di rette, determinando anche il centro del fascio.
- (c) Consideriamo l'insieme delle coniche duali delle coniche date. Si tratta di un sistema lineare di coniche? È contenuto in qualche iperpiano dello spazio delle coniche duali?

**Esercizio 3.** Sia  $\gamma$  una curva regolare unitaria nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$ , e siano  $t, n, b$  il suo riferimento di Frenet,  $\kappa, \tau$  curvatura e torsione. Si consideri una curva  $\delta(s)$  tale che  $\delta'(s) = t(s) + n(s)$  cioè direzione definita dalla somma dei versori tangente e normale di  $\gamma$  ( $s$  è il parametro d'arco di  $\gamma$ ).

- (a) Determinare il sistema di riferimento di Frenet di  $\delta$  in funzione di quello di  $\gamma$ .
- (b) Determinare la curvatura di  $\delta$  in funzione di curvatura e torsione di  $\gamma$ .
- (c) Determinare la torsione di  $\delta$  in funzione di curvatura e torsione di  $\gamma$ . In quali casi la curva  $\delta$  risulta piana?