**quarto appello Geometria 2 parte B - 12 settembre 2025**

**Vanno consegnati: questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento (leggibile e ben giustificato) degli esercizi.**

**Riportare i seguenti dati anche sui fogli protocollo con lo svolgimento:**

**Cognome:** _______________ **Nome:** _______________ **Matricola:** ________

**Testo del compito:**

**Esercizio 1.** Si consideri la superficie ottenuta ruotando il profilo $z = x \cos x$ con $x > 0$ (nel piano $x, z$) attorno all'asse delle $z$.

($a$) Scrivere una parametrizzazione $\sigma$ e una equazione cartesiana per la superficie.
($b$) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di $\sigma$.
($c$) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, la curvatura $K$ di $\sigma$, e determinare il tipo dei punti su $\sigma$. Determinare le curve formate dai punti parabolici.
($d$) Determinare le linee di curvatura su $\sigma$, e le linee asintotiche di $\sigma$.
($e$) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di $\sigma$; ridurre il sistema ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine.

**Esercizio 2.** Sull'insieme $X = \mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$ (dove $\mathbb{Q}$ è dotato della topologia usuale) consideriamo la topologia prodotto $\tau$ e la box-topology $\beta$ (generata dai prodotti di aperti).

($a$) Elencare le proprietà di numerabilità, separazione, connessione e compattezza per $X$ dotato della topologia $\tau$ e della topologia $\beta$.
($b$) Descrivere gli intorni della funzione nulla per $\tau$ e per $\beta$; è vero che la funzione nulla appartiene alla chiusura (per $\tau$ e/o per $\beta$) dell'insieme delle funzioni mai nulle?
($c$) Determinare chiusura e interno per $\tau$ e per $\beta$ dell'insieme delle funzioni costanti.
($d$) Determinare chiusura e interno per $\tau$ e per $\beta$ dell'insieme delle funzioni limitate.
($e$) Determinare chiusura e interno per $\tau$ e per $\beta$ dell'insieme $([0,1] \cap \mathbb{Q})^{\mathbb{R}}$.

**Esercizio 3.** Sia $X$ uno spazio topologico, $\tau$ la topologia. Consideriemo le seguenti proprietà:
(1) $X$ è pseudo-compatto, cioè ogni funzione continua $X \to \mathbb{R}$ è limitata;
(2) $X$ è fortemente connesso, cioè ogni funzione continua $X \to \mathbb{R}$ è costante;
Mostrare che :
($a$) compatto implica pseudo-compatto, e il viceversa è falso;
($b$) fortemente connesso implica pseudo-compatto, e il viceversa è falso;
($c$) vi sono relazioni tra essere fortemente connesso ed essere compatto?
*Sugg.: si considerino come esempi:* $\mathbb{R}$ *con topologia usuale, escludente* 0 *includente* 0*, cofinita, conumerabile, compattificazione con un punto di* $\mathbb{R}$*, topologie discrete su insiemi finiti o infiniti.*