① $Q(x) = x_0^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - x_3^2$
$= x_0^2 - (x_1+x_2+x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2$

rg 4 rg$_\infty$ 3
sgn $(3,1)$ sgn$_\infty$ $(2,1)$

proiettivamente: non degenere, su $\mathbb{R}$ ha punti, non rette
affinemente $(x_0 \neq 0)$: iperboloide ellittico

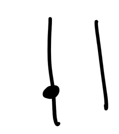
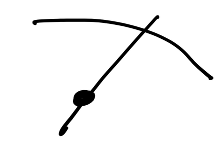
② possiamo supporre $P = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $q = (1\,0\,0)$
allora le coniche dell'insieme hanno matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & c & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e si tratta quindi di un sistema lineare di dim 2
("rete di coniche" = piano proiettivo nel $\mathbb{P}^5$ delle coniche)

sono degeneri le coniche con $b^2c = 0$,
ovvero $b=0$: $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $c=0$: $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1(2ax_0 + cx_1)$ $x_0(ax_1 + bx_2)$

per $X = \begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}$ calcoliamo $x = (x_0\,x_1\,x_2)\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & c & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$= (ax_1 + bx_2,\ ax_0 + cx_1,\ bx_0)$
$= a(x_1, x_0, 0) +$
$b(x_2, 0, x_0) +$
$c(0, x_1, 0)$

e al variare di a,b,c possiamo trovare:
- tutto $(\mathbb{P}^2)^*$ se le 3 righe sono indipendenti
- un fascio o una retta altrimenti, cioè se $\begin{vmatrix} x_1 & x_0 & 0 \\ x_2 & 0 & x_0 \\ 0 & x_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

cioè $x_1^2 x_0 = 0$:
se $x_0 = 0 = x_1$, cioè per $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ otteniamo la retta $(1\,0\,0)$
se $x_0 = 0 \neq x_1$, otteniamo le rette del fascio di centro $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
se $x_0 \neq 0 = x_1$, otteniamo le rette del fascio $\begin{cases}(x_1, x_0, 0) \\ (x_2, 0, x_0)\end{cases}$
di centro $\begin{pmatrix}x_0\\-x_1\\-x_2\end{pmatrix}$.

per l'insieme delle coniche duali abbiamo matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & c & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}^C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -bc \\ 0 & -b^2 & ab \\ -bc & ab & -a^2 \end{pmatrix}$$

che parametrizzano l'insieme di $\mathbb{P}^5$ dato da

$$\begin{cases} x_{00} = 0 \\ x_{01} = 0 \\ x_{02} = -bc \\ x_{11} = -b^2 \\ x_{12} = ab \\ x_{22} = -a^2 \end{cases}$$

che è certamente contenuto negli iperpiani $x_{00} = 0$ e $x_{01} = 0$ (e in tutti quelli del loro fascio), inoltre è contenuto nella quadrica
$x_{11}x_{22} = x_{12}^2$
(e anzi, coincide, quindi non è un sistema lineare)

D'altra parte si tratta di un sistema di coniche definito da 2 condizioni lineari (o meglio una condizione lineare doppia: passaggio per un punto con data tangente) e 1 condizione quadratica (avere una fissata tangente, senza prefissare il punto di tangenza).

③ $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ curva in p.d'a, t, n, b rif Frénet
k, τ curvature $(t'\,n'\,b') = (t\,n\,b)\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$

$\delta(s)$: curva tale che $\delta'(s) = t(s) - b(s)$
otteniamo $\delta' = t - b$ $= \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$
$\delta'' = t' - b'$
$= kn - (-\tau n) = (k+\tau)n$ $= \begin{pmatrix}0\\k+\tau\\0\end{pmatrix}$
$\delta''' = (k+\tau)'n + (k+\tau)n' =$
$= (k+\tau)'n + (k+\tau)(-kt + \tau b)$
$= -k(k+\tau)\,t + (k+\tau)'n + \tau(k+\tau)\,b = \begin{pmatrix}-k(k+\tau)\\(k+\tau)'\\\tau(k+\tau)\end{pmatrix}$

da cui $t_\delta = \delta'/\|\delta'\| = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$n_\delta = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = n_\gamma$ (se $k+\tau > 0$)
$b_\delta = t_\delta \times n_\delta = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

e $k_\delta = \frac{\|\delta' \times \delta''\|}{\|\delta'\|^3} = \frac{\sqrt2\,\sqrt{|k+\tau|}}{\sqrt2^3} = \frac{\sqrt{|k+\tau|}}{2}$

$\tau_\delta = \frac{|\delta'\,\delta''\,\delta'''|}{\|\delta' \times \delta''\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -k(k+\tau) \\ 0 & k+\tau & (k+\tau)' \\ -1 & 0 & \tau(k+\tau) \end{vmatrix}}{2|k+\tau|} = \frac{(k+\tau)(k+\tau)(\tau-k)}{2|k+\tau|} = \frac{|k+\tau|(\tau-k)}{2}$

risulta una retta per $k_\delta = 0$, $k+\tau = 0$ $\frac{\tau}{k} = -1$

e un'elica generalizzata se $\tau = k$ $(\tau_\delta = 0)$.