

quinto appello Geometria 2 parte A - 12 settembre 2025

Vanno consegnati: questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento (leggibile e ben giustificato) degli esercizi.

Riportare i seguenti dati anche sui fogli protocollo con lo svolgimento:

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____

Testo del compito:

Esercizio 1. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 - 2X_1X_2 - 2X_1X_3 - 2X_2X_3 - X_3^2$$

di \mathbb{R}^4 .

- (a) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.
- (b) Classificare proiettivamente e affinemente la quadrica \mathcal{Q} di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e rette eventualmente complesse contenute in \mathcal{Q} .

Esercizio 2. Consideriamo l'insieme delle coniche del piano proiettivo passanti per un fissato punto e tangenti in un altro fissato punto ad una fissata retta.

- (a) Mostrare che si tratta di un sistema lineare di coniche, scrivendone una matrice in un riferimento scelto; quali sono le coniche degeneri contenute in questo insieme?
- (b) Per ogni punto del piano consideriamo l'insieme delle polari rispetto alle coniche date. Determinare per quali punti l'insieme delle polari è un fascio di rette, determinando anche il centro del fascio.
- (c) Consideriamo l'insieme delle coniche duali delle coniche date. Si tratta di un sistema lineare di coniche? È contenuto in qualche iperpiano dello spazio delle coniche duali?

Esercizio 3. Sia γ una curva regolare unitaria nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , e siano t, n, b il suo riferimento di Frenet, κ, τ curvatura e torsione. Si consideri una curva $\delta(s)$ tale che $\delta'(s) = t(s) - b(s)$ cioè direzione definita dalla differenza dei versori tangente e binormale di γ (s è il parametro d'arco di γ).

- (a) Determinare il sistema di riferimento di Frenet di δ in funzione di quello di γ .
- (b) Determinare la curvatura di δ in funzione di curvatura e torsione di γ .
- (c) Determinare la torsione di δ in funzione di curvatura e torsione di γ . In quali casi la curva δ risulta piana?