Proiezioni e simmetrie ortogonali in $\mathbb{R}^n$

Proiezione $E^n(0)$ ortogonale $\frac{E^n(0)}{A^n(0)}$: $\dim = n-1$ ipersottospazio vettoriale

è l'unica affinità ipersimmetrica $\mathbb{R}^n$ relativa a $A^n(0)$ che fissa tutti i punti di $A^n(0)$ e manda ogni punto $P \notin A^n(0)$ in un punto P' tale che $\overline{PP'} \perp A^n(0)$ e $\overline{PP'} \cap A^n(0) \neq \emptyset$ (punto medio)

Se A^n proiettivo con $E^n(0)$ si ottiene equivalente reciproco da $\mathbb{R}$ e $E^n(0)$ $\dim = n-1$ $\Rightarrow E^n(0) = \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R} \neq \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow \frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{R}^n} = \{0\}$ $\Rightarrow \mathbb{R} \neq \mathbb{R}^n$

Problema : classificare tutte le proiettività $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

(punti uniti: $P = P'$)
con proprietà UNICO da aspettarsi da $E^n(0)$

Ma rispetto ad un $E^n(0)$ in $\mathbb{R}^n$ ogni punto P ha un unico punto P' associato

Dato P qualsiasi, $P' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$P' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$P' = AP + B$ $A \in GL_n(\mathbb{R})$ $B \in \mathbb{R}^n$

Ma dobbiamo anche imporre che $\overline{PP'} \perp A^n(0)$ e $\overline{PP'} \cap A^n(0) \neq \emptyset$

Sia $\vec{v}$ un vettore direttore di $\overline{PP'}$ e $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-1}$ una base di $A^n(0)$

Allora $\vec{v} = \lambda_1 \vec{w}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \vec{w}_{n-1}$ per qualche $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$

Ma $\vec{v} = P' - P = AP + B - P = (A - I_n)P + B$

Quindi $(A - I_n)P + B = \lambda_1 \vec{w}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \vec{w}_{n-1}$

Ma $P \in A^n(0)$ se $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$

Quindi $(A - I_n)P + B = \lambda_1 \vec{w}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \vec{w}_{n-1}$

$\begin{pmatrix} a_{11} - 1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{w}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \vec{w}_{n-1}$

$\begin{cases} (a_{11} - 1)x_1 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + b_1 = \lambda_1 w_{11} + \dots + \lambda_{n-1} w_{n-1,1} \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1} + b_n = \lambda_1 w_{1n} + \dots + \lambda_{n-1} w_{n-1,n} \end{cases}$

Se $\det(A - I_n) \neq 0$ $\Rightarrow$ sistema di Cramer $\Rightarrow$ esiste una sola soluzione $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$

Se $\det(A - I_n) = 0$ $\Rightarrow$ sistema omogeneo $\Rightarrow$ ∞^1 soluzioni

Se $\det(A - I_n) = 0$ $\Rightarrow$ ∞^1 proiettività

Se $\det(A - I_n) \neq 0$ $\Rightarrow$ una sola proiettività