Seconda lezione: (geometria delle coniche tra piano { circonferenza
geometria delle proiettività tra rette (Pascal) { tangente ad una conica (Brianchon)
Coniche)

Richiami di varie coniche (euclidee):

Ellisse: $\mathcal{E}$ conica, $P \in \mathcal{E}$ punto
$P \neq \pm E$ (punti all'infinito)
schema: r = retta $\perp$ a E passante per P; P_E = piede di r su E; $P_{E'}$ = piede di r su E'; $P_{\mathcal{E}}$ = P (per costruzione)
$\Rightarrow \frac{P_E P}{P_E P_{\mathcal{E}}} = \frac{b}{a}$
ellisse come immagine tramite φ di una circonferenza: $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{a}{b} y \end{pmatrix}$
(equazione ellisse) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$
"Il luogo dei punti tali che la somma delle distanze da due punti fissati è costante"
Iperbole: $\mathcal{I}$ conica, $P \in \mathcal{I}$ punto
$P \neq \pm E$ (punti all'infinito)
schema: r = retta $\perp$ a E passante per P; P_E = piede di r su E; $P_{E'}$ = piede di r su E'; $P_{\mathcal{I}}$ = P (per costruzione)
$\Rightarrow \frac{P_E P}{P_E P_{\mathcal{I}}} = \frac{b}{a}$
$\mathcal{I}$ come immagine tramite φ di una circonferenza: $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{a}{b} y \end{pmatrix}$
equazione iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$
"Il luogo dei punti tali che la differenza delle distanze da due punti fissati è costante"
Asintoti: $\mathcal{I}$ ha due punti all'infinito $\pm E$
$\Rightarrow$ due rette per O parallele a $\pm E$: r_+, r_-
$\mathcal{I}$ è contenuta nella regione tra r_+ e r_-
Parabola: $\mathcal{P}$ conica, $P \in \mathcal{P}$ punto
$P \neq E$ (punto all'infinito)
$\mathcal{P}$ come immagine tramite φ di una parabola: $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{a} y \end{pmatrix}$
equazione parabola: $y = ax^2$
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y$
"Il luogo dei punti tali che la distanza da un punto fissato è uguale alla distanza da una retta fissata"

Esempi:

① $\mathcal{E}: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X^2 + Y^2 = 1$
$P = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$
$\begin{cases} X = t \\ Y = t(s+1) \end{cases}$ conica
$\Rightarrow$ retta per P con coefficiente angolare $\frac{1}{t}$
$X^2 + t^2(s+1)^2 = 1$
$(1+t^2)s^2 + t^2(2s) + t^2 - 1 = 0$
$\Delta/4 = t^4 - (1+t^2)(t^2-1) = 1$
$(1+t^2)X^2 + 2t^2X + (t^2-1) = 0$
$X = \frac{-t^2 \pm 1}{1+t^2} = \begin{cases} -1 \\ \frac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$
$Y = t(s+1) = \begin{cases} 0 \\ \frac{2t}{t^2+1} \end{cases}$
$\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ e r si intersecano in $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ \frac{2t}{t^2+1} \end{pmatrix}$
$V = \mathcal{E}(\infty) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Parametrizzazione razionale di $\mathcal{E}$: $t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ \frac{2t}{t^2+1} \end{pmatrix}$
Tangente a $\mathcal{E}$ in V: $X = 1$

② $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $-X^2 + Y^2 = 1$
$P = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ $\begin{cases} X = t \\ Y = st \end{cases}$ conica
$-t^2 + s^2t^2 = 1$
$t^2(s^2-1) = 1$
$t = \pm\frac{1}{\sqrt{s^2-1}}$
$\Rightarrow$ $\mathcal{I}$ e r si intersecano in $\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{s^2-1}} \\ \pm\frac{s}{\sqrt{s^2-1}} \end{pmatrix}$
Parametrizzazione razionale di $\mathcal{I}$: $t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{s^2-1}} \\ \frac{s}{\sqrt{s^2-1}} \end{pmatrix}$
Tangente a $\mathcal{I}$ in V: $X = 1$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X^2 = 2YZ$
$P = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ $\begin{cases} X = t \\ Y = \frac{1}{2}s^2 \\ Z = s \end{cases}$ $\begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}s^2 \\ s \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $2XZ = Y^2$
$P = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ $\begin{cases} X = t \\ Y = s \\ Z = \frac{1}{2}s^2 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} t \\ s \\ \frac{1}{2}s^2 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$

Teorema: Ogni conica non degenere è una delle precedenti.

Idea della dimostrazione: $\mathcal{C}$ conica
$\mathcal{C}(X,Y) = \begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$
$= aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dX + 2eY + f$
$= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + f$
$= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + f$
$A = A^t$ matrice simmetrica
$\exists$ matrice ortogonale M tale che MAM^{-1} è diagonale
$\Rightarrow$ $\exists$ cambio di coordinate ortogonale che elimina il termine misto
$\Rightarrow$ $\mathcal{C}(X,Y) = \lambda X^2 + \mu Y^2 + 2dX + 2eY + f$
Se $\lambda = 0$ o $\mu = 0$, siamo in un caso precedente.
Se $\lambda \neq 0$ e $\mu \neq 0$, completando i quadrati si ottiene $\lambda(X+\alpha)^2 + \mu(Y+\beta)^2 = \gamma$
Se $\gamma = 0$, $\mathcal{C}$ è una coppia di rette incidenti.
Se $\gamma \neq 0$, dividendo per γ si ottiene $\frac{(X+\alpha)^2}{\gamma/\lambda} + \frac{(Y+\beta)^2}{\gamma/\mu} = 1$, che è un'ellisse o un'iperbole.

Una conica è data da $\mathcal{C}(X,Y) = \begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$
Omogeneizzando: $\mathcal{C}(X,Y,Z) = aX^2 + 2bXY + cY^2 + 2dXZ + 2eYZ + fZ^2 = 0$
$\mathcal{C}$ è una conica se e solo se $\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \neq 0$
Se $\mathcal{C}$ è una conica, $\mathcal{C}$ interseca la retta all'infinito $Z = 0$ in $aX^2 + 2bXY + cY^2 = 0$
$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ ha due punti all'infinito se $b^2 - ac > 0$, un punto all'infinito se $b^2 - ac = 0$, nessun punto all'infinito se $b^2 - ac < 0$
Dipendono da $\mathcal{C}(X,Y) + \lambda Z^2 = 0$, che è una conica se $\lambda \neq 0$, altrimenti è la retta doppia $Z = 0$.

Una conica è data da $\mathcal{C}(X,Y) = \begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} =