TEOREMA FONDAMENTALE DELLE CURVE PIANE

(Teorema di $\exists!$ / teorema di esistenza ed unicità):

dati $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $n-1$ funzioni differenziabili $(n-1), \dots, n-1)$ $\quad c \geq 0$ se $1 < n-1$

allora

$\exists!$ curva differenziabile $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ a meno di isometrie di $\mathbb{R}^2$ che ha quelle funzioni come curvature.

discussione:

usiamo le formule di Frenet per problemi del Cauchy per sistemi di eq. diff. lineari.

($\exists$) : segniamo $0 \in I$,

risolviamo il problema di Cauchy: $\begin{cases} E' = EK \\ E(0) = I_n \end{cases}$

dove $K = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & & \\ 0 & k_2 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -k_{n-1} \\ 0 & & & k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$

otteniamo $E(t)$ soluzione,

usiamo $\gamma(t) = \int$ (1ª riga di E) (la prima riga di $E(t)$).

(La prima riga è ottenuta dall'integrale, usando le formule di Frenet, che danno precisamente $E_1' = k_1 E_2$)

($\forall$/unicità): γ_1, γ_2 soluzioni e curva Frenet di $t=0$

$\gamma_1(0) \in \mathbb{R}^2$, $E_1(0) \in \mathcal{O}_+(\mathbb{R}^2)$

$\gamma_2(0) \in \mathbb{R}^2$, $E_2(0) \in \mathcal{O}_+(\mathbb{R}^2)$

usiamo R isometria di $\mathbb{R}^2$ tale che $R(\gamma_1(0)) = \gamma_2(0)$, $R(E_1(0)) = E_2(0)$

allora anche $R\gamma_1 = \gamma_2$

poiché $R\gamma_1$ e γ_2 risolvono lo stesso problema del Cauchy (numero che $R^2 = 0$) //

nota: nel teorema del Cauchy ed $\exists!$ fac. ha visto non si vanno solo ipotesi sui differenziabilità delle funz.

nel teorema di Frenet basta che $k_1 > 0$ da cui $k_2, \dots, k_{n-1}$ e serve anche ulteriore curvature γ e tutto il resto $E_2, \dots$

nella dimostrazione:

① perché $E(t)$ è ortogonale per ogni t?

② perché $E(t)$ è la matrice delle rot. di Frenet di $\gamma = \int$ prima colonna di E per ogni t?

Cosa può succedere, per esempio, nel caso che la prima curvatura si annulli in qualche punto?

$E' = EK$:

$E^t E = \mathrm{id} \Rightarrow (E^t E)' = 0$

$\Updownarrow$

$(E^t)' E + E^t E' = 0$

$\Updownarrow$

$(E^t) E + E^t E K = 0$

$\Updownarrow$

$K^t E^t E + E^t E K = 0$

$\Updownarrow$

$K^t + K = 0$

$\Updownarrow$

$K^t = -K \Rightarrow E' = EK$

$E(t)^t \cdot E(t) = E^t E = \mathrm{id}$

$E' E^t + E E^t = 0$

$EK E^t + E E^t = 0$

$E(EKE^t) + I = 0$

$I + K = 0$

$\Updownarrow$

$EE^t + \text{antisim.} \; (= 0 \text{ sse } n=2)$

$\Updownarrow$

$(EE^t)' = 0$

$E' E^t + E E^{tt} = 0$

$\Updownarrow$

$E^t E^{tt} + E^t E^t = 0$

$\Updownarrow$

$E^t E^{tt} = -E^t E^t$

$(E^t)^t \cdot (E^t E^t) = E^t E^t = -E^t E^t$

$\Updownarrow$

$E^t E^t = 0$

Esempio nel caso si annulla k_1:

usiamo la funzione $\varphi(t) := e^{-\frac{1}{t^2}} = e^{-\frac{1}{t^2}}$

è C^∞ anche in 0 (ha caratteristica $\varphi^{(n)}(0) = 0 \; \forall k$)

ma non è analitica (la serie di Taylor in 0 si scrive, è $\equiv 0$, ma $\varphi(t)$ non è così!)

(1) $\begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$: 1 regolare (non 2-regolare (in 0)) $\exists!$ riferimento di Frenet

(2) $\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ non è 1-regolare (in 0) $\nexists$ rif. Frenet

(2) $\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ Inoltre di ordine ≥ 1 continuo (e) mentre il numero cambia ($\varepsilon_0 \to \varepsilon_1$) dunque $\nexists$ rif. Frenet

Inoltre: in 0 abbiamo $E(0) = 0$ e la γ cambia piano osculatore in quel punto.

(3) $\begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ TRENTA di $\begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ TRENTA di $\begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$

possiamo fare riferimento di Frenet (troviamo modo scelto scelta in quello vicino di ignorato), una non in modo unico!

Esplicitazione del problema nel piano $\mathbb{R}^2$:

dato $K(t)$ funzione differenziabile

$(t, \gamma)' = (t, \gamma) \begin{pmatrix} 0 & -K \\ K & 0 \end{pmatrix}$ $\quad c=2$ $\quad \begin{cases} \gamma' = t \\ t' = K\gamma \end{cases}$

$n' = -K t$

sia $t = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) \\ \sin\theta(s) \end{pmatrix}$, $t' = \begin{pmatrix} -\theta' \sin\theta \\ \theta' \cos\theta \end{pmatrix} = \theta' \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \theta' n$

$n = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos\theta(t) \end{pmatrix}$ $\quad$ $K = \theta'$

poniamo $\theta(t) := \int K(t)\,dt$

$t = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\int K(t)dt) \\ \sin(\int K(t)dt) \end{pmatrix}$

$\gamma = \int t \, ds$ (LEGARE tempo t che ci guida ds)

Scelto s può capitare per esempio alcuni casi "facili" con cui si esprime K in termini del parametro s e d'arco:

es $K = 0$, costante, poniamo $= 1$, poniamo $= \frac{1}{2}$ ...

- $K = 0$

  $\theta = \int K ds = \text{costante} = \theta_0$

  dunque $t = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{pmatrix}$ costante.

  $\gamma = \int t \, ds = \int \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ (punto iniziale)

  $K = 0$ sse γ retta

- $K = \text{costante} \neq 0$

  $\theta(s) = \int K ds = Ks$

  dunque $t = \begin{pmatrix} \cos(Ks) \\ \sin(Ks) \end{pmatrix}$

  $\gamma = \int t \, ds = \begin{pmatrix} \frac{1}{K}\sin(Ks) \\ -\frac{1}{K}\cos(Ks) \end{pmatrix} = \frac{1}{K} \begin{pmatrix} \sin(Ks) \\ -\cos(Ks) \end{pmatrix}$

  circonferenza di raggio $\frac{1}{K}$ se $K > 0$.

  $K = \text{costante} \neq 0$ sse γ circonferenza (raggio $\frac{1}{|K|}$)

- $K \leq 1$ $\quad$ ($K(s) = cs$ con c costante, $c \leq 1$)

  CURVE DI RACCORDO

  $K(s) = s$

  $\theta(s) = \int K(s) ds = \int s\,ds = \frac{1}{2}s^2$

  $t = \begin{pmatrix} \cos(\frac{s^2}{2}) \\ \sin(\frac{s^2}{2}) \end{pmatrix}$

  $\gamma = \begin{pmatrix} \int \cos(\frac{s^2}{2})\,ds \\ \int \sin(\frac{s^2}{2})\,ds \end{pmatrix}$

  usiamo le approssimazioni con funzioni elementari. Si dimostra (ex MODEL) $s \to \pm\infty : \gamma \to \pi \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

  SPIRALI DI CORNU

- $K \leq \frac{1}{2}$ $\quad$ curvature relativamente ragionevole di partenza d'arco: "SPIRALE LOGARITMICA":

  $K(0) > 0$

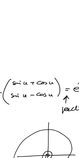
  $\theta(s) = \int K(s) ds = \int \frac{1}{2} ds = \frac{s}{2}$ $\quad$ ($\theta_0 = 0$)

  $t = \begin{pmatrix} \cos(\frac{s}{2}) \\ \sin(\frac{s}{2}) \end{pmatrix}$

  $\gamma = \int t \, ds = \begin{pmatrix} \int \cos(\frac{s}{2}) e^{is} ds \\ \int \sin(\frac{s}{2}) e^{is} ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \cos(u) e^{2iu} 2du \\ \int \sin(u) e^{2iu} 2du \end{pmatrix} = \frac{e^{iu}}{2} \begin{pmatrix} \sin u + i \cos u \\ \sin u - i \cos u \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

  $u = \frac{s}{2}$, $du = \frac{1}{2} ds$, $ds = 2du = e^{2iu} du$

  poiché?

  Proviamo anche la viceversa:

  Per ogni spirale log abbiamo $K(s) = K_0$:

  $\gamma(t) = a e^{bt} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

  $\gamma' = a e^{bt} \begin{pmatrix} -\sin t + b\cos t \\ \cos t + b \sin t \end{pmatrix}$ $\quad |\gamma'|^2 = a^2 e^{2bt} (1+b^2)$

  $\gamma'' = a e^{bt} \begin{pmatrix} -\cos t - 2b\sin t + b^2 \cos t \\ -\sin t + 2b\cos t + b^2 \sin t \end{pmatrix}$

  $|\gamma' \gamma''| = a^3 b^2 e^{3bt} (1+b^2)$

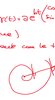
  $K(t) = \frac{|\gamma' \gamma''|}{|\gamma'|^3} = \frac{a^3 b^2 e^{3bt} (1+b^2)}{a^3 e^{3bt} (1+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} = \frac{1}{b} = \frac{1}{s(t)}$

  cioè $K(t) = \frac{1}{s(t)}$ ●

  $s(t) = \int_0^t |\gamma'(u)|\,du = \int_0^t a e^{bu} \sqrt{1+b^2}\,du = \frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}\, e^{bt}$

  - Proviamo anche la spirale $\frac{1}{s}$: come $\gamma(t) = a e^{bt} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ (facciamo "polo della spirale" d'origine)
  - Ex nella dal polo facciamo angolo costante con la tangente (vedi punto di valore zero):

    "SPIRALE EQUIANGOLARE"

  - Ex nella dal polo calcoliamo la spirale un punto con proprietà sopra (regolo di lunghezza = costante)

  - Ex completezza da un punto della spirale al polo (finita) è finita.
  - Facendo ruotare la spirale su una tangente, il polo descrive una retta!

---

giovedì 11 dicembre 2025

Sintesi: $\quad \gamma : I \xrightarrow{K^{(n)}} \mathbb{R}^2$

$V_0 = (\gamma', \dots, \gamma^{(n)}) \text{ cost}) \; : \; I \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$

E_γ := riferimento di Fr. di Γ : $I \to \mathcal{O}_+(\mathbb{R}^2)$

$E_\gamma' = E_\gamma K_\gamma \qquad K_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & & \\ k_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -k_{n-1} \\ & & k_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = -K_\gamma$

T.R.Cl.U.E.: Vediamo anche K, con $K \geq 0$ ($\subset C^{n-1}$)

esiste unica γ (a meno di isometrie di $\mathbb{R}^2$) con $K_\gamma = K$.

problema: nelle ipotesi del T.R.Cl.U.E. è necessario che $K \geq 0$?

γ resta ogni $K : I \to \mathbb{R}$ (Vi)

(=) caso curvatura

(⇐) $\gamma' = K_0 \gamma \Rightarrow \gamma'$ risolvente $\gamma = \gamma_0 + \gamma_0$

circonferenza nel piano:

γ circonferenza $\Leftrightarrow$ $K = \text{costante}$, $K \neq 0$ $\forall t \in I$

(⇒) calcolo diretto

(⇐) $\begin{cases} t' = Kn \\ n' = -Kt \; (= 2\theta) \\ \text{boundary...} \end{cases}$ $\Rightarrow t'' = Kn' \; (K \text{ costante})$

$t'' = -K^2 t$

$\Rightarrow$ ...

curva piana nel piano: $K > 0$, $K \geq 0$ (cioè) (basta $K_1 \neq 0$?)

Spirale di ARCHIMEDE:

$\gamma(t) = at \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $\quad$ eq. polare $\rho = a\theta$ $\quad$ (a costante)

$= a \begin{pmatrix} t\cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}$

$\gamma' = a \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \end{pmatrix}$ $\quad \gamma'' = a \begin{pmatrix} -2\sin t - t\cos t \\ 2\cos t - t\sin t \end{pmatrix}$

$|\gamma' \gamma''| = a^2 \left| \begin{matrix} \cos t - t\sin t & -2\sin t - t\cos t \\ \sin t + t\cos t & 2\cos t - t\sin t \end{matrix} \right| = \ldots = a^2 (2 + t^2)\, a$

$k = \frac{|\gamma' \gamma''|}{|\gamma'|^3} = \frac{2a^2 + a^2 t^2}{a^3 (1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2+t^2}{a (1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$

$s(t) = \int_0^t a\sqrt{1+u^2}\,du = a \int_0^t \sqrt{1+u^2}\,du = \ldots = \frac{a}{2} \left(t\sqrt{1+t^2} + \text{sett sh}(t) \right)$

$\int_0^t \sqrt{1+u^2}\,du$ $\quad \int \sqrt{1+t^2}\,dt = \int \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$

$= \frac{a}{2} \left(t\sqrt{1+t^2} + \log\left(t + \sqrt{1+t^2} \right) \right)$

Problema: c'è relazione tra k ed s esplicitabile?

Problemi:

spirale iperbolica:

$\rho(\theta) = \frac{a}{\theta} \Rightarrow \gamma(\theta) = \frac{a}{\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

spirali CVS:

$\gamma(t) = a \begin{pmatrix} C(t) \\ S(t) \end{pmatrix}$

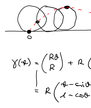
$\gamma'(t) = a \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{pmatrix} \cdots$

$\vdots$

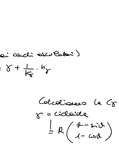
$K = \frac{1}{a} t^2$?

curva con $\frac{1}{K} = 2as$ $\quad$ a costante $=$ parametro d'arco ?

CICLOIDE CLASSICO:



$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} R\theta \\ R \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} -\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \theta - \sin\theta \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix}$



$\gamma = R \begin{pmatrix} \theta - \sin\theta \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad \gamma' = R \begin{pmatrix} 1 - \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$\|\gamma'\| = R\sqrt{2 - 2\cos\theta} = R\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\theta}$

$s(\theta) = \int R\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$

$= R\sqrt{2} \int \sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$

$\vdots$

$= 4R\cos\frac{\theta}{2}$?

$\gamma'' = R \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$|\gamma' \gamma''| = R^2 \left| \begin{matrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & \cos\theta \end{matrix} \right| = R^2 (\cos\theta - 1)$

$k = \frac{|\gamma' \gamma''|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{R^2(\cos\theta - 1)}{R^3 (\sqrt{2}^3 \sqrt{1-\cos\theta}^3)} = \frac{-1}{R\sqrt{2}^3 \sqrt{1-\cos\theta}}$

--- relazione tra k ed s che caratterizza la cicloide?...

Se γ è curva, curva dei centri (dei cerchi osculatori) è detta la $C_\gamma := \gamma + \frac{1}{k} n_\gamma$

Calcoliamo la C_γ per $\gamma = \text{cicloide}$

$= R \begin{pmatrix} \theta - \sin\theta \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix}$

$k = -\frac{1}{R\sqrt{2}^3 \sqrt{1-\cos\theta}}$

$n = -\text{ccw}(t) \qquad t = \frac{1}{\|\gamma'\|} \gamma' = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}} \begin{pmatrix} 1 - \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix}$

$C_\gamma = \gamma + \frac{1}{k} n = R \begin{pmatrix} \theta - \sin\theta \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix} + (-R\sqrt{2}^3) \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix}$

$\vdots$

$= R \begin{pmatrix} \pi + \sin\theta \\ -1 + \cos\theta \end{pmatrix}$

$= R \begin{pmatrix} \pi \\ -2 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} (\theta + \pi) - \sin(\theta + \pi) \\ 1 - \cos(\theta + \pi) \end{pmatrix}$

TRASLAZIONE $\quad$ CICLOIDE RIPARAMETRIZZATA

Giovedì 15 dicembre 2025