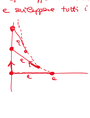
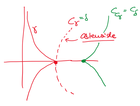
Esercizio: Negli esercizi cercare la TRATTRICE, e svolgere tutti i conti





COSTRUZIONI: con curve:

① CURVA DEI CENTRI:

γ unitaria, $k_\gamma \neq 0$ sempre,
definiamo C_γ curva dei centri dei cerchi osculatori

$$C_\gamma := \gamma + \frac{1}{k}n$$

(la speranza: avere curve dei fuochi delle proiettili)

nel piano:

$C_\gamma' = \gamma' + \left(\frac{1}{k}\right)' n + \frac{1}{k} n' = t - \frac{k'}{k^2} n - \frac{1}{k} kt = -\frac{k'}{k^2} n$

$t_{C_\gamma} \parallel n_\gamma$ nota quindi C_γ ha come tangenti le rette normali a γ in ogni suo punto

problema: riusciamo a calcolare la curva se conosciamo le sue rette tangenti?

$\|C_\gamma'\|^2 = \frac{k'^2}{k^4}$ al solito vale ≥ 0 ed è un parametro d'arco.

$C_\gamma'' = \left(-\frac{k'}{k^2} n\right)' = \left(-\frac{k'}{k^2}\right)' n - \frac{k'}{k^2} n' = *n - \frac{k'}{k^2}(-kt)$

$k_{C_\gamma} = \frac{|C_\gamma' \; C_\gamma''|}{\|C_\gamma'\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & * \\ -k'/k^2 & k'^2/k^2 \end{vmatrix}}{(|k'|/k^2)^3} = \frac{k^3}{k'^3}$

problema: quali curve γ hanno C_γ come loro curva di γ?
usando TRC: quelle per cui $K = \frac{k^3}{k'^3}$

$k'^3 = k^3$

$\frac{k'^3}{k^3} = 1$ $\quad$ $\left(\frac{1}{k}\right)' = -1$ $\quad$ $\frac{1}{k} = -s$

$\boxed{k = \frac{1}{-s}}$ spirali: e^{θ}?

nello spazio: si vede subito che è per complicato:

γ unitaria, t, n, b, κ, τ:

$C_\gamma = \gamma + \frac{1}{k}n$

$C_\gamma' = \gamma' + \left(\frac{1}{k}\right)' n + \frac{1}{k} n' = t - \left(\frac{1}{k}\right)' n + \frac{1}{k}(-\kappa t + \tau b) = \left(-\frac{1}{k}\right)' n + \frac{\tau}{k} b = \begin{pmatrix} 0 \\ (1/k)' \\ \tau/k \end{pmatrix}$ nella base t, n, b.

vettore tg di C_γ è $\perp t_\gamma$

$\|C_\gamma'\|^2 = \left(\frac{1}{k}\right)'^2 + \left(\frac{\tau}{k}\right)^2$ dipende da 1

$C_\gamma'' = \left(-\frac{k'}{k^2} n + \frac{\tau}{k} b\right)'$

$= \left(-\frac{k'}{k^2}\right)' n - \frac{k'}{k^2} n' + \left(\frac{\tau}{k}\right)' b + \frac{\tau}{k} b'$

$= \left(\frac{k'}{k}\right) t + \left(-\frac{(k')'}{(k')^2} - \frac{\tau}{k}\right) n + \left(\left(\frac{\tau}{k}\right)' - \frac{\tau k'}{k^2}\right) b = \begin{pmatrix} k'/k \\ -(k'/k)' - \tau^2/k \\ \left(\frac{\tau}{k}\right)' - \frac{\tau k'}{k^2} \end{pmatrix}$

$k_{C_\gamma} = \frac{\|C_\gamma' \times C_\gamma''\|}{\|C_\gamma'\|^3} = \dots$

$C_\gamma''' = \dots$

$\tau_{C_\gamma} = \frac{|C_\gamma' \; C_\gamma'' \; C_\gamma'''|}{\|C_\gamma' \times C_\gamma''\|^2} = \dots$

Esempio classico nel piano:

cercare una curva γ tale che C_γ sia una circonferenza:

data γ con curvatura k, C_γ ha curvatura $\frac{k^3}{k'^3}$

quindi cerchiamo γ tale che $\frac{k^3}{k'^3}$ = costante

imponiamo $\frac{k'}{k^3} = -R$ $\quad$ $K(s)$ $\quad$ $\left(\int \frac{k'}{k^3} ds = -\frac{1}{2} k^{-2}\right)$

integriamo rispetto a s:

$-\frac{1}{2k^2} = -Rs$

$\boxed{k^2 = \frac{1}{2Rs}}$

e specifichiamo la strategia per costruire la curva nel piano considerando $\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{2Rs}\sqrt{s}}$

(curvatura inversamente proporzionale a $\sqrt{s}$)

$\theta(s) = \int K(s)\, ds = \int \frac{1}{\sqrt{2Rs}\sqrt{s}} ds = \frac{1}{\sqrt{2R}} \left(\frac{ds}{\sqrt{s}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2R}} \sqrt{s}$

$t_\gamma(s) = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) \\ \sin\theta(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R}} s\right) \\ \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R}} s\right) \end{pmatrix}$

$\gamma = \int t_\gamma(s)\, ds$ $\longrightarrow$ problema: calcolare

$\int \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R}} x\right) dx = \int \cos(x) R\, dx$ $\quad$ $= R \int x \cos(x)\, dx$

$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R}} s$

$2x\, dx = \frac{2}{R} ds$

$ds = R\, x\, dx$ $\quad$ $= R(x \sin x + \cos x)\Big|_{x = \sqrt{\frac{2}{R}} s}$

$\int \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R}} s\right) ds = R \int x \sin(x)\, dx$

$= R\left(-x\cos(x) + \sin(x)\right)\Big|_{x = \sqrt{\frac{2}{R}} s}$

$= R \begin{pmatrix} x \sin x + \cos x \\ -x \cos x + \sin x \end{pmatrix}_{x = \sqrt{\frac{2}{R}} s}$

$= R \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{R}} s \sin\left(\sqrt{\frac{2}{R}} s\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{2}{R}} s\right) \\ -\sqrt{\frac{2}{R}} s \cos\left(\sqrt{\frac{2}{R}} s\right) + \sin\left(\sqrt{\frac{2}{R}} s\right) \end{pmatrix}$

questo conto si può ottenere a partire dalla circonferenza nel seguente modo:
a partire da un punto P della circonferenza,
si fa rotolare la sua tangente sulla circonferenza e si vede la traiettoria del punto.

"il inviluppo dei cerchi"

---

② CURVE DERIVATE E PRIMITIVE:

γ unitaria, t, n, b, κ, τ:

curva delle tangenti (indicatrice delle tangenti)

$\delta := \gamma' = t$ $\quad$ (nel piano $\subseteq \mathbb{R}^2$, nello spazio $\subseteq \mathbb{R}^3$, come è ovvio!)

$\delta' = \gamma'' = t' = \kappa n$ $\quad$ $\|\delta'\| = |\kappa|$ $\quad$ $t_\delta = \pm n$

$\delta'' = (\kappa n)' = \kappa' n + \kappa n' = \kappa' n + \kappa(-\kappa t + \tau b) = -\kappa^2 t + \kappa' n + \kappa\tau b$ $\quad$ $n_\delta = \frac{-\kappa^2 t + \kappa\tau b}{\|\cdot\|}$

$\delta' \times \delta'' = \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \kappa' \\ \kappa^2 \\ \kappa\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\kappa^2\tau \\ \kappa^3 \end{pmatrix} = \kappa^2\tau\, t + \kappa^3 b$

$k_\delta = \frac{\|\delta' \times \delta''\|}{\|\delta'\|^3} = \frac{\sqrt{\kappa^4\tau^2 + \kappa^6}}{|\kappa|^3} = \sqrt{\frac{\tau^2}{\kappa^2} + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}$

$\delta''' = (-\kappa^2 t + \kappa' n + \kappa\tau b)' = (-3\kappa\kappa')t + (\dots) n + ((\kappa\tau)' + \tau\kappa^2) b$ $\quad$ $(\kappa^2\tau + \kappa\tau')$

$\tau_\delta = \frac{|\delta' \; \delta'' \; \delta'''|}{\|\delta' \times \delta''\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} \kappa & 0 & -\kappa^2 - 3\kappa\kappa' \\ 0 & \kappa^2 & * \\ 0 & \kappa\tau & * \end{vmatrix}}{(\kappa^2(\tau^2+\kappa^2))^2} = \dots = \frac{\kappa(\tau\kappa')}{\kappa^2(\tau^2+\kappa^2)}$

curva delle normali:

$\nu = n$

$\nu' = n' = -\kappa t + \tau b$ $\quad$ $\|\nu'\|^2 = \kappa^2 + \tau^2$

$\nu'' =$

$\nu' \times \nu'' =$

$k_\nu =$

$\nu''' =$

$\tau_\nu =$

primitiva della normale:

$\mu := \int n(s)\, ds$

$\mu' = n$

$\mu'' = n' =$

$\mu''' =$

curva delle binormali:

$\beta := b$

$\beta' = b' = -\tau n$

$\beta'' = b'' = (-\tau n)'$

$\beta' \times \beta''$

$k_\beta =$

$\beta''' =$

$\tau_\beta =$

primitiva delle binormali:

$\alpha := \int b(s)\, ds$

$\alpha' = b$ $\quad$ (α unitaria)

$\alpha'' = b' = -\tau n$

$\alpha''' = (-\tau n) = -\tau' n - \tau n' = -\tau' n - \tau(-\kappa t + \tau b) = \kappa\tau\, t - \tau' n - \tau^2 b$

$k_\alpha = \|\alpha''\| = |\tau|$

$\tau_\alpha = \frac{|\alpha' \; \alpha'' \; \alpha'''|}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \kappa\tau \\ 0 & -\tau & * \\ 1 & 0 & * \end{vmatrix}}{\tau^2} = \frac{\kappa\tau^2}{\tau^2} = \kappa$

nota α è una curva con $\kappa = \tau$ "eccentrica" rispetto a β

---

problema: non abbiamo le curve notevoli:
(cicloide = traiettoria di Feynman)
serve interessarsi?

---

③ EVOLUTE ed INVOLUTE: di curve piane:

definizione: γ evoluta di δ $\quad$ se $\begin{cases} ① & \delta(t) \in t_\gamma = \gamma \text{ ut } \gamma(t) \\ ② & \gamma'(t) \cdot \delta'(t) = 0 \end{cases}$

δ involuta di γ (complicata)

se $\delta(t) = \gamma(t) + (L - s)\gamma'(t)$
con L costante opportuna

quindi δ si ottiene da γ tracciando su ogni retta tangente a γ il punto a distanza $L - s$ dal punto di tangenza

dimostriamo ① ⇔ ②

② ⇒ ① la prima condizione $\delta(t) \in \gamma(t) + \langle \gamma'(t) \rangle$
per la seconda: $\delta'(t) = \gamma'(t) + (L-s)'\gamma'(t) + (L-s)\gamma''(t)$
$= \gamma'(t) - \gamma'(t) + (L-s)\gamma''(t)$
$= (L-s)\gamma''(t) \perp \gamma'(t)$ perché pdl di s.

① ⇒ ② della prima condizione esplicitiamo che
$\delta(t) \in \gamma(t) + \langle \gamma'(t) \rangle$
$= \gamma(t) + \ell(t)\gamma'(t)$
dunque
$\delta'(t) = \gamma'(t) + \ell'(t)\gamma'(t) + \ell(t)\cdot\gamma''(t)$
$= (1 + \ell'(t))\gamma'(t) + \ell(t)\gamma''(t)$
per la seconda condizione $\delta'(t) \perp \gamma'(t)$
deve essere
$1 + \ell'(t) = 0$ $\quad$ $\ell'(t) = -1$
$\ell(t) = L - s$ //

Nel piano: C_γ è evoluta di δ
$\gamma = \delta + \frac{1}{k_\delta} n_\delta$

EVOLUTA di δ = CURVA DEI CENTRI di δ
= INVILUPPO DELLE NORMALI di δ

INVOLUTE di γ sono le curve δ con $C_\delta = \gamma$
(c'è una famiglia di involute, e sono "curve parallele")

Giovedì 18 dicembre 2025