Geometria 2 Secondo semestre:

① Geometria diff. superfici ($S \subseteq \mathbb{R}^3$: Spazio, nulla vieta che sia $\mathbb{R}^n$:
- uso il senso proprietà N-dimensionali consentite,
- il fatto sia "inclusa" (Euclidea) (sul piano fa un ruolo punto) calcolare modulo consideriamo intrinseco di S, ...)

② Topologia generale

Programma: (1) definizioni e descrizioni locali per la superficie

(2) spazi tangenti alla superficie:
- Il fatto funzionalmente (intrinseca)
- VERRÀ usando nei punti della superficie (riferiscono, dipende dall'ambiente $\mathbb{R}^3$)
  → Il fatto funzionalmente

(3) invariante fondamentale:
- T. Gaussiana di Gauss: K = curvatura di Gauss $= \det(\text{diff. Gauss}) = \frac{\det(II)}{\det(I)}$
  è intrinseca, dipende solo dalla I.F.
- Studieremo alcuni tipi di curve e superficie in particolare: GEODETICHE.

Facciamo solo cenni e diamo le strumenti senza fare la dimostrazione.
- T. Ellisp. Gauss (Gauss-Bonnet): principio sulle superficie
- T. ∃! per superficie: risultato di una equazione alle derivate parziali, quindi devono essere spinte di integrabilità per avere soluzione, non basta la regolarità dei dati come nel caso delle curve (equazione diff. ordinaria!).

DEFINIZIONI:

Una superficie differenziale (immersa in $\mathbb{R}^3$) è un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^3$ che:
"intorno ad ogni punto somiglia ad un aperto di $\mathbb{R}^2$"

$\forall$ punto $X \in S$, $\exists$ disco $D = B(X, \varepsilon) \subseteq$ e una funzione $\vec{r}: U \xrightarrow{\text{iniz}} D$ con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ che dà biiezione $U \leftrightarrow S \cap D$ (dip. tempo inizio 2)
$\vec{r}$ si dice PARAMETRIZZAZIONE LOCALE di S intorno a $X \in S$

La scrivo in coordinate $\vec{r} = \vec{r}^{\,1}$ si dice CARTA di S intorno a X.

Un insieme di parametrizzazioni / carte per ogni punto (oppure che ricoprono la superficie) si dice un ATLANTE differenziale di S.

RAPPRESENTAZIONI DELLE SUPERFICIE:

(G) grafici di funzioni: $f: \underset{\text{aperto}}{U} \to \mathbb{R}$

$\Gamma(f) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ f(\xi) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in U \right\} \subseteq U \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$

O una superficie con una CARTA GLOBALE, parametrizzazione data da:
$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ f(\xi,\eta) \end{pmatrix}$
$U \to \mathbb{R}^3$

Il vicinato è dato: una superficie un generale non è il grafico di una funzione, ok. Grafo.

Problema: una sup. descritta da una data parametrizz.:
$U \to \mathbb{R}^3$
$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(\xi,\eta) \\ g(\xi,\eta) \\ h(\xi,\eta) \end{pmatrix}$

è il grafico di una funzione?

Nota: (G) $\xrightarrow{\text{Sempre}}$ (Z)
(Z) $\xrightarrow{\text{T. Dini}}$ Loc. Z
T. Dini: Loc. G $\Leftrightarrow$ Sup. (come parametrizzazione) Grafo (Loc.)
T. Ritorno

(Z) Tutti dei funzioni $\vec{r}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aventi jacobiana di rango massimo ($=2$)
$d\vec{r}_p: \underset{\text{Piano}}{\mathbb{R}^2} \to \underset{\text{Spazio tang.}}{\mathbb{R}^3}$
sono superfici!

Allora il teorema del Dini: (funzione implicita) ci assicura localmente punto vicinanze $Z(P)$ come grafico di funzioni differenziabili. Cosa sono tipi speciali dei piani n-dimensionali.

Es. La sfera è $Z(P)$ per $\Phi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$
($d\Phi = (2x, 2y, 2z)$ allora ha $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ il rango)

Il vicinato non è caso: non è detto che una sup. generale sia descritta dagli tipi di una funzione globale.
Però, anche non lo, localmente sì.

DEFINIZIONE:

Una superficie differenziale (immersa in $\mathbb{R}^3$) è un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^3$ che:
"intorno ad ogni punto somiglia ad un aperto di $\mathbb{R}^2$"

$\forall$ punto $X \in S$, $\exists$ disco $D = B(X, \varepsilon) \in$ e una funzione $\vec{r}: U \xrightarrow{\text{iniz}} D$ con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ che dà biiezione $U \leftrightarrow S \cap D$ (dip. tempo inizio 2)
$\vec{r}$ si dice PARAMETRIZZAZIONE LOCALE di S intorno a $X \in S$

La scrivo in coordinate $\vec{r} = \vec{r}^{\,1}$ si dice CARTA di S intorno a X.

Un insieme di parametrizzazioni / carte per ogni punto (oppure che ricoprono la superficie) si dice un ATLANTE differenziale di S.

Esempio. piano: $z=0$ in $\mathbb{R}^3$ parametrizzazione $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma(\xi,\eta)$
$\sigma_\xi = \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\sigma_\eta = \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$z=0$ con $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ piano: $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\xi \\ \sin\xi \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma(\xi,\eta)$
$\sigma_\xi = \begin{pmatrix} -\sin\xi \\ \cos\xi \\ 0 \end{pmatrix}$
$\sigma_\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$z=\cos\xi\eta$ piano: $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \cos\xi\eta \end{pmatrix}$
$\sigma_\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\eta\sin\xi\eta \end{pmatrix}$
$\sigma_\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\xi\sin\xi\eta \end{pmatrix}$

Sfera: ellissoidi: fra dei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Parametrizzazione $\left(\frac{\xi}{a}, \frac{\eta}{b}, \frac{\zeta}{c}\right)$
si semplifica solo per $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ che sono indipendenti
l'equazione, quindi non è della superficie

dunque che ellissoidi sono superficie differenziali:
quante carte devono per descriverle?
- se usiamo la proiezione sul piano coordinato:
  (sempre 6 carte/parametrizzazioni)
  (ogni carta copre una "semiellissoide speciale")
- se usiamo coordinate polari si può fare con 2 carte
  (ogni carta copre l'ellissoide tranne una semiellipse)
- se usiamo proiezioni stereografiche si può fare con 2 carte
  (ogni carta copre l'ellissoide tranne il punto di proiezione)
- non si può fare con una sola carta perché l'ellissoide è compatto, gli aperti del piano no.

$\sigma_1: \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \pm\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}} \end{pmatrix}$ sono 2 parametrizzazioni
stesse coordinate!
stesse - sole.

$\sigma_2: \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a\cos\xi\cos\eta \\ b\cos\xi\sin\eta \\ c\sin\xi \end{pmatrix}$
$\xi \in [0, 2\pi]$
$\eta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
Cosa l'ellissoide tranne una semiellissi del polo N del polo S.

σ_3: $\xrightarrow{\text{Stereografica}}$ $(x,y) \in \mathbb{R}$
Proiezione stereografica dal polo N, copre tutto l'ellissoide tranne N.

Lunedì 23/02/2026

Problema: piano
ellissoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k$
iperboloide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = k$
paraboloide: $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
coni / cilindri

Superficie S (immersa in $\mathbb{R}^3$) conna:
$S \subseteq \mathbb{R}^3$: $\forall X \in S$, $\exists\, D = B(X, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^3$
$\exists\, \vec{r}: \underset{\mathbb{R}^2}{U} \to D$ di aperto (ω)
$\vec{r}$ biiezione
$\vec{r}: U \cap D \to S$ PARAMETRIZZAZIONE
$\forall P: D \cap S \to U$ CARTA.

Definizione: SPAZIO (PIANO) TANGENTE alla superficie:
$X \in \mathbb{R}^3$ superficie
$T_X X$:
piano tangente a X in $\mathbb{R}^3$
sottospazio vettoriale formato da $\mathbb{R}$
e con spazio vettoriale $T_X(X) := \left\{ \gamma'(0) : \begin{array}{l} \gamma \text{ curva } \subseteq X, (-\varepsilon,\varepsilon) \to X \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \gamma(0) = \mathbb{R} \end{array} \right\}$
"tutti i vettori tangenti a tutte le curve contenute in X e passanti per $\mathbb{R}$"

Nota $X \subseteq \mathbb{R}^3$ allora $T_X X$ è spazio vettoriale reale di dim 2 su $\mathbb{R}$.

Allora descrivo la curva di $\mathbb{R}^3$ ($\gamma: I \to \mathbb{R}^3$) che sono contenute in X superficie di $\mathbb{R}^3$:
se $\operatorname{Im}(\gamma)$ è contenuta in una carta di X,
allora γ si descrive:
$t \underset{\mathbb{R}}{\in} I \xrightarrow{\gamma} \underset{\mathbb{R}^3}{U} \xrightarrow{\sigma} X \subseteq \mathbb{R}^3$
$t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \mapsto \sigma(u,v)$
$t \mapsto \sigma(u(t), v(t))$

$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$

$$\boxed{\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t) = \frac{d}{dt}\sigma(u(t),v(t)) = \frac{\partial}{\partial u}\sigma(u(t),v(t))\frac{du}{dt}(t) + \frac{\partial}{\partial v}\sigma(u(t),v(t))\frac{dv}{dt}(t)}$$

$\boxed{\gamma' = \sigma_u \cdot u' + \sigma_v \cdot v'}$

$T_P X = \langle \sigma_u(0), \sigma_v(0) \rangle$
spazio vettoriale di dim 2.

Rappresentazione tramite spazi tangenti:
la sup X può essere data come
loc. MONGE/GRAFF (per. 1.G2)
loc. GENERICO di fiori
loc. TEORI di fiori. (per. 1.G2)

loc. fun: $\sigma: U \to X \subseteq \mathbb{R}^3$
$(u,v) \mapsto \sigma(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$
allora $T_P(X) = \langle \sigma_u(P), \sigma_v(P) \rangle = \operatorname{im}(d\sigma(P))$
$T(X) = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$

loc. grafici: $f: \underset{\mathbb{R}^2}{U} \to \mathbb{R}$, $X = \Gamma(f)$ ha carta $U \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^3$
$(u,v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$
$T_P(X) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u(P) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v(P) \end{pmatrix} \right\rangle$

loc. zero: $X = Z(\Phi)$ $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$d\Phi_P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diverse, rango 1
$T_P(X) = \ker(d\Phi_P)$

perché abbiamo carte locali: σ di X hai che
$U \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{d\Phi} \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{d\sigma} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{d\Phi} \mathbb{R}$
$d\Phi \circ d\sigma = 0$
in $(d\sigma) \subseteq \ker(d\Phi)$
una stessa dimensione
diamo =
$\Rightarrow T_P X = \ker(d\sigma) = \ker(d\Phi)$.

Per ogni $P \in X$ abbiamo definito $T_P X \subseteq \mathbb{R}^3$
dim 2
che cambia con P

$$\boxed{\begin{array}{l} TX := \coprod_{P \in X} T_P(X) \xrightarrow{\pi} X \\ \text{FIBRATO TANGENTE di } X \end{array}}$$
$(P, v) : v \in T_P(X)$
$(P, v) \longmapsto P$
$\pi^{-1}(P) = T_P(X)$

Sezioni del fibrato tangente sono funzioni $\mathbb{R}^{\text{ne}}$
$X \xrightarrow{s} TX$ tali che $X \xrightarrow{s} TX$
$P \longmapsto$ $\pi \circ s = id_X$

Funzioni differenziabili tra superficie differenziabili:

X, Y superficie $\subseteq \mathbb{R}^3$
una funzione unilaterale $f: X \to Y$
si dice una funzione differenziabile se vicinato $\forall P$ a una delle seguenti:

Se X, Y sono descritte tramite parametrizzazione/carte, allora esiste
$X \xrightarrow{f} Y$
$\sigma \uparrow \quad \uparrow \tau$
$U \xrightarrow{\tau^{-1}\circ f\circ\sigma} V$
su tutto un aperto

Se X, Y sono descritte come loc. fun. dei funzioni:
allora esiste:
$X \xrightarrow{f} Y$
$\mathbb{R}^2 \supseteq U \xrightarrow{\tau^{-1}\circ f\circ\sigma} V \subseteq \mathbb{R}^2$

Se $f: X \to Y$ è funzione differenziabile,
definiamo il differenziale di f:

$TX \xrightarrow{df_P} TY$
$X \xrightarrow{f} Y$

cioè:
$df_P: T_P X \to T_{f(P)} Y$ lineare (e calcolabile)

$$\boxed{df_P(v) := (\xi \circ \gamma)'(0) \in T_{f(P)} Y}$$
$v \in T_P(X)$
$v = \gamma'(0)$ per $\gamma: (-\varepsilon,\varepsilon) \to X$, $0 \mapsto P$

Non dipende da γ (ma solo da v)

$$\boxed{\begin{array}{l} f: \underset{\mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}^m \\ \forall P \in U: T_P \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \\ df_P: \underset{\mathbb{R}^n}{T_P \mathbb{R}^n} \to \underset{\mathbb{R}^m}{T_{f(P)} \mathbb{R}^m} \\ df_P(v) = \partial_v f(P) \end{array}}$$
per qualsiasi punto P.

La definizione di $df_P(v)$ dipende da f, P, v; una volta definita tutta cosa v oppure per la definizione (tale che $\gamma(0) = P$, $\gamma'(0) = v$ $\in T(X)$).

Nel $\mathbb{R}^n$ c'è un sistema canonico tra
vettori $\mathbb{R}^n$ — derivazioni direzionali
$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$
$e_i \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}$
(in ogni punto $P \in \mathbb{R}^n$ è funzione $C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \partial f(P)$)

in $\mathbb{R}^3$
$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \partial_v = v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial}{\partial x_3}: C^\infty \to \mathbb{R}$

Si replica a mano canonicamente
$T_P X \longleftrightarrow$ sottospazio dei vettori 2 dei derivazioni direzionali dei $\mathbb{R}^3$
$v \in T_P(X) \longleftrightarrow \partial_v : C^\infty(X) \to \mathbb{R}$
funzioni C^∞ definite su X (restrette a X)

allora $(df_P)(\xi) = (f \circ \gamma)'(0) = \sum_i^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)\frac{d\gamma_i(0)}{dt} = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(P)$
$\gamma(0) = P$, $\gamma'(0) = \xi$
$\begin{pmatrix} \gamma_1(0) \\ \vdots \\ \gamma_n(0) \end{pmatrix} \frac{d\gamma(0)}{dt} = \xi$
$= \left(\sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f(P)$
$= \partial_\xi f(P)$

$$\boxed{df(\xi) = \partial_\xi(f) = \xi(f)}$$
$\xi \in T_P(X)$ $\xi = \partial_\xi$ consideriamolo tra $\mathbb{R}$.

"differenziale di f calcolato nel vettore ξ è la derivazione direzionale di f nella direzione ξ"

Problema: se ξ, η sono "campi vettoriali su TX".
Si vuole fondare nuovo vettori (dipendono dal punto P) e nuove derivazioni direzionali,
dove un punto che equivale $\xi + \eta = \zeta$
e vedere che non sono derivazioni direzionali,
cioè non sono vettori tangenti (!),
ma
$[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$
è nuova derivazione direzionale (ma una derivazione tangente).

martedì 24/02/2026.

$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in T_P X \longrightarrow \partial_\xi = \xi_1\partial_1 + \xi_2\partial_2$ come funzione $C^\infty(X) \to \mathbb{R}$
$f \longmapsto \partial_\xi(f)$
∂_ξ Derivazione
Esistente: $\partial_\xi(fg) = f(\partial_\xi g) + g(\partial_\xi f)$
funzioni differenziabili
tra $X \to \mathbb{R}$

$\xi \in TX \longleftrightarrow \partial_\xi = \xi_1\partial_1$ e per ogni punto $P \in X$ da $C^\infty(X) \to \mathbb{R}$
campo vettoriale tangente (sezione di $TX \to X$)
dunque $C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$
$f \longmapsto (P \mapsto \partial_\xi(f))$
$\forall X \subseteq \mathbb{R}^3$

Ora, se ξ, η sono campi tangenti:
$\xi \circ \eta = (\xi_1\partial_1 + \xi_2\partial_2)(\eta_1\partial_1 + \eta_2\partial_2) = \sum_i \xi_i \partial_i(\eta_1)\partial_1 + \xi_i \eta_i \partial_i\partial_i$
$\eta \circ \xi = (\eta_1\partial_1 + \eta_2\partial_2)(\xi_1\partial_1 + \xi_2\partial_2) = \sum_i \eta_i \partial_i(\xi_1)\partial_1 + \eta_i \xi_i \partial_i\partial_i$
non sono derivazioni, sono termini differenziali del secondo ordine!

ma
$[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi = \sum_i \left(\xi_i \partial_i(\eta_1) - \eta_i \partial_i(\xi_1)\right)\partial_1$
è campo di derivazioni (operatore differenziale primo ordine)

$\Rightarrow \xi, \eta \in TX \Rightarrow [\xi, \eta] \in TX$

Scrivo: $\mathbb{R}$ bilineare
antisimmetrica: $[\xi, \xi] = 0$
Jacobi: $[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0$

(si dice "nodo di Lie" o "parentesi di Lie")

derivazione per
$(\xi \circ \eta)(f) = \xi(\eta(f)) = \dots = (\quad)(f)$
per ξ e η campi tangenti.