G2D-256-02

martedì 21 aprile 2026 08:50

Topologie e operatori di Kuratowski

Riassunto $(X,\mathcal{T})$ sp. topologico:
X insieme,
$\mathcal{T}$ topologia: $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ chiuso per $\cap$ finite, $\cup$ arbitrarie

$x \in X$, $S \subseteq X$, relazioni tra punti e sottoinsiemi:

x è INTERNO a S se $\exists U \in \mathcal{T}_{\ni x}$ con $U \subseteq S$

è ADERENTE a S se: $\forall U \in \mathcal{T}_{\ni x}$: $U \cap S \neq \emptyset$
(di chiusura per S)

è DI ACCUMULAZIONE per S se: $\forall U \in \mathcal{T}_{\ni x}$: $U \cap (S \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

è DI FRONTIERA per S se è ADERENTE sia ad S sia a $X \setminus S = S^c = \complement S$
(complementare di S)
$(\forall U \in \mathcal{T}_{\ni x} : U \cap S \neq \emptyset \neq U \cap (X \setminus S))$

è ESTERNO ad S se è INTERNO al $X \setminus S$.

Di conseguenza, dato un insieme $S \subseteq X$, possiamo definire altri insiemi, legati a S:

S° = interno di S $:= \{x \in X : x \text{ è interno a } S\} \subseteq S$
$=$ unione di tutti gli aperti $\subseteq S$
$=$ massimo aperto $\subseteq S$

$\overline{S}$ = chiusura di S (aderenza di S) $:= \{x \in X : x \text{ è aderente ad } S\} \supseteq S$
$=$ intersezione di tutti i chiusi $\supseteq S$
$=$ minimo chiuso che $\supseteq S$.

S' = DERIVATO di S $:= \{x \in X : x \text{ è di accumulazione per } S\}$

∂S = BORDO di S $= \overline{S} \setminus S^\circ$

S è $\begin{cases} \text{APERTO} \\ \text{CHIUSO} \\ \text{PERFETTO} \end{cases}$ sse $\begin{cases} S = S^\circ & \text{(problema)} \\ S = \overline{S} & \text{(problema)} \\ S = S' & \text{(definizione)} \end{cases}$

definizioni:

S è $\begin{cases} \text{DENSO} \\ \text{POVERO} \\ \text{RARO} \end{cases}$ sse $\begin{cases} \overline{S} = X & \text{(chiusura è tutto lo spazio)} \\ S^\circ = \emptyset \\ \overline{S}^\circ = \emptyset \end{cases}$

problema:
- è più piccolo chiuso che $\supseteq S$
- è tutto lo spazio X
- qualunque aperto $\neq \emptyset$ ha intersezione con $S \neq \emptyset$.

(infatti $S \cap$ aperto $\neq \emptyset$
$S \subseteq$ chiuso compl.)

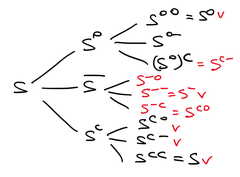
Problema rifinito (quasi): cognire le relazioni insiemistiche tra le operazioni $\cup, \cap, \subset, \ldots$, e operazioni topologiche $\circ, -, ', \partial \ldots$

esempio $\circ : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$S \longmapsto S^\circ$

nota: $(S \cup T)^\circ$ e $S^\circ \cup T^\circ$?
$S \cup T \supseteq S$
$(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \Rightarrow$ abbiamo $\supseteq$

$X = \mathbb{R}$, $S = \mathbb{Q}$, $T = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad S^\circ = \emptyset \quad T^\circ = \emptyset \quad S \cup T = \mathbb{R} \quad (S \cup T)^\circ = \mathbb{R}$

Esercizio: usando le operazioni $\circ, -, c$ (complemento), a partire da un insieme $S \subseteq X$, quanti insiemi distinti si possono ottenere?



(Si trovano al massimo 14 insiemi distinti, e insiemi S tali che danno 14 insiemi distinti si dicono 14-insiemi di Kuratowski, trovarne uno che sia $\subseteq \mathbb{R}$ con topologia usuale)

si osservano relazioni del tipo: $(S^\circ)^c = (S^c)^-$
$S^\circ = S^{c-c}$

$x \in (S^{c-})^c \Leftrightarrow x \notin S^{c-}$
$\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{T}_{\ni x} : U \cap S^c = \emptyset$
$\Leftrightarrow$ " : $U \subseteq S$
$\Leftrightarrow x \in S^\circ$

$(S^-)^c \overset{?}{=} (S^c)^\circ$
$\overline{S} \overset{?}{=} ((S^c)^\circ)^c$
$x \notin (S^c)^\circ$ $\quad (x \in A^\circ \equiv \exists U \in \mathcal{T}_{\ni x} : U \subset A)$
$\forall U \in \mathcal{T}_{\ni x} : U \not\subseteq S^c$
$: U \cap S \neq \emptyset$
$x \in \overline{S}$

nota: $S^{\circ c} = S^{c-}$, $S^\circ = S^{c-c}$, $S^{c\circ c} = S^-$, $S^{c\circ} = S^{-\circ}$ $(\forall S \subseteq X)$
sono tutte uguaglianze equivalenti tra loro...

Poi bisogna vedere cosa succede di $S^{\circ-\circ-\cdots}$ e $S^{-\circ-\circ\cdots}$,
e succede $S^{\circ-\circ-} = S^{\circ-}$ e $S^{-\circ-\circ} = S^{-\circ}$
(cioè $(\circ-)^2 = \circ-$ e $(-\circ)^2 = -\circ$)

Le proprietà fondamentali per

$\circ : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$S \longmapsto S^\circ$

sono:
1. ORDINATO: $S \subseteq T \Rightarrow S^\circ \subseteq T^\circ$ $(\forall S,T)$
2. $\subseteq$ IDENTITÀ: $S^\circ \subseteq S$ $(\forall S)$
3. COMMUTA con la $\cap$ FINITE: $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$ e $X^\circ = X$
4. IDEMPOTENTE: $S^{\circ\circ} = S^\circ$

dimostrazione per esercizio

$- : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$S \longmapsto \overline{S}$

1. $S \subseteq T \Rightarrow \overline{S} \subseteq \overline{T}$
2. $\supseteq$ id: $\overline{S} \supseteq S$
3. commuta con $\cup$ finite: $(S \cup T)^- = \overline{S} \cup \overline{T}$ e $\overline{\emptyset} = \emptyset$
4. idemp: $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$

Su X insieme qualsiasi, diciamo "operatore di Kuratowski di interno/chiusura" qualsiasi $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ con le proprietà ①②③④ sopra.

Quindi: Topologia su X $\longrightarrow$ Operatori K di $\circ$ su X
$\mathcal{T}_X \longmapsto \circ$

Viceversa, se diciamo su X un operatore di Kuratowski, è vero che esiste una topologia che ha quello come operatore di interno/chiusura?

$? \longleftarrow\!\shortmid \circ$

definiamo $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$
usando $\{S \subseteq X : S = S^\circ\} \subseteq \mathcal{P}(X)$
oppure i chiusi come $\{S \subseteq X : \overline{S} = S\} \subseteq \mathcal{P}(X)$

---

op. int $\longleftarrow$ Topologia su X $\longrightarrow$ Op. chiusura di K (id, ?)
$\mathcal{T} \longmapsto -$
$\{S \subseteq X : S = \overline{S}\} \longleftarrow\!\shortmid -$
chiusi di una topologia? quella di partenza?

$\mathcal{T} \longmapsto -$
$\{S : S = \overline{S}\} \longleftarrow -$
sono i chiusi di $\mathcal{T}$?
$\{S : S = \overline{S}\} \subseteq$ chiusi di X
$\supseteq$ se S è chiuso di $\mathcal{T}$ allora $\overline{S} = S$ per l'op. Kuratowski $-$ di $\mathcal{T}$.

Alcune composizione:

① se $-$ è op. di K su X $(- : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ ①②③④$)$
è vero che i suoi autoinsiemi
$\mathcal{C} = \{S : S = \overline{S}\}$
sono i chiusi di una topologia, cioè che
si tratta di $\subset \mathcal{P}(X)$ che $\ni \emptyset, X$, chiuso per $\cup$ finite $\cap$ arbitrarie?

$\mathcal{C} \ni \emptyset$? perché $\emptyset = \overline{\emptyset}$ per ②
$\mathcal{C} \ni X$? vero che $X = \overline{X}$? — $X \subseteq \overline{X}$ per ② $\Rightarrow \overline{X} = X$ $(\overline{X} \in \mathcal{P}X, \overline{X} \subset X)$

$S, T : S = \overline{S}$, $T = \overline{T}$ $\Rightarrow$ $S \cup T$ autoinsieme?
$\overline{S \cup T} \underset{③}{=} \overline{S} \cup \overline{T} = S \cup T$

$S_\alpha = \overline{S_\alpha}$ cosa possiamo dire delle $\bigcap_\alpha S_\alpha$?
$\overline{\bigcap_\alpha S_\alpha} \supseteq \bigcap_\alpha S_\alpha$ (perché $\overline{S} \supseteq S$ ②)
basta mostrare $\subseteq$ cioè $\overline{\bigcap_\beta S_\beta} \subseteq S_\alpha$ $\forall \alpha$

$\bigcap_\beta S_\beta \subseteq S_\alpha$ $\forall \alpha$
$\overline{\bigcap_\beta S_\beta} \subseteq \overline{S_\alpha} = S_\alpha$ $\forall \alpha$ //

nota gli autoinsiemi hanno le proprietà dei chiusi di una topologia usando solo ①②③, non colla potenza!

② dato l'operatore $-$ di K, e conosciuto la topologia che definisce (tramite i suoi autoinsiemi) l'operatore di tale topologia è quello di partenza?

problema:
se $-$ è anche idempotente, la risposta è sì, perché lui qual caso gli autoinsiemi determinano completamente l'operatore:
se $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$ allora $\boxed{\overline{S} = \bigcap \text{ tutti gli autoinsiemi che } \supseteq S}$

esercizio: trovare un operatore con proprietà ①②③ ma non idempotente, e vedere che la topologia che lui determina non dà l'op. di partenza:

$\mathbb{Z}$ $\quad \overline{\{n\}} = \{n-1, n, n+1\}$
$\overline{S} = ?$
dà la topologia banale $\{\emptyset, \mathbb{Z}\}$, il cui operatore di chiusura è $\overline{S} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } S = \emptyset \\ \mathbb{Z} & \text{se } S \neq \emptyset \end{cases}$, e non è l'op. di partenza!

se $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$ allora:
$\overline{S} = \bigcap_{\substack{T = \overline{T} \\ T \supseteq S}} T$ $\quad \forall S \subseteq X$

① $T \supseteq S \Rightarrow \overline{T} \supseteq \overline{S} \Rightarrow T \supseteq \overline{S} \Rightarrow \bigcap_{S \subseteq T = \overline{T}} T \supseteq \overline{S}$
$(\overline{T} = T$ - ordinato$)$ $\quad (\forall T \supseteq)$

② bisogna vedere che $\bigcap_{\substack{T = \overline{T} \\ T \supseteq S}} T$ è $\subseteq \overline{S}$,
l'ipotesi $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$ $(\supseteq S)$ dice che $\overline{S}$ è uno dei termini dell'$\cap$, quindi $\cap \subseteq \overline{S}$.

Dizionari: banale $\{\emptyset, X\}$ — operatori di K? $S \mapsto S^\circ = \begin{cases} \emptyset & \text{se } S \neq X \\ X & \text{se } S = X \end{cases}$
discreta — identità $\mathcal{P}(X)$! $S \mapsto \overline{S} = \begin{cases} X & \text{se } S \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{se } S = \emptyset \end{cases}$
cofinita — $S \mapsto \overline{S} = \begin{cases} S & \text{se è finito} \\ X & \text{altrimenti} \end{cases}$
cofinita numerabile —
metriche... —
includenti/escludenti $A \subseteq X$ — topologie indotte dalla di un insieme $A \subseteq X$, top. i cui APERTI sono $\emptyset$ e insiemi $\supseteq A$.

chiusi sono complementari degli aperti, cioè C con $C \cap A = \emptyset$

$\circ : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$S \longmapsto \begin{cases} \emptyset & \text{se } S \not\supset A \\ S & \text{se } S \supset A \end{cases}$
(se U aperto $U \subseteq A$ allora $S \subseteq U \subseteq A$)

$- : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$S \longmapsto \begin{cases} X & \text{se } S \cap A \neq \emptyset \\ S & \text{se } S \cap A = \emptyset \end{cases}$

---

martedì 21 aprile 2026 _