

③ conica $2x_0x_2 = x_1^2$ ha matrice $\begin{pmatrix} & & -1 \\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$

e parametrizzazione $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2/2 \end{pmatrix}$
($x=0$ dà il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

se $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ è conica osculatrice alla precedente
in $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ allora la
intersezione $x=0$ compare con
multiplicità ≥ 3 :

$$2x_0^2 + 2bx_0x_1 + 2cx_0x_2 + dx_1^2 + 2ex_1x_2 + fx_2^2 = 0$$

$$2(1) + 2b(x) + 2c(x^2/2) + dx^2 + 2e(x^3/2) + f(x^4/4) = 0$$

dove avere $a=0$ (coeff. noto)
 $b=0$ (coeff. x)
 $c+d=0$ (coeff. di x^2),

quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & -c & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

di conseguenza un sistema lineare di due (piuttosto) 2,
cioè una RETE di coniche, e le coniche degeneri
sono solo per $c=0$, quindi un fascio, non
possiamo generare la rete con le coniche degeneri
(che stanno tutte su una retta del P^2 delle coniche).

Le coniche quindi hanno vertici del tipo

$$A^c = \begin{pmatrix} -cf-e^2 & +ec & c^2 \\ +ec & -c^2 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = c^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + ec \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (-cf-e^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e hanno tutte su un piano di P^2 generato dalle tre coniche
di vertici scritte sopra (ma alcuni punti di quel piano non
si ottengono con la parametrizzazione scritta),

confrontando con la rete di portate si vede che sono
una rete di coniche osculatrici, trovano alcuni punti

di una retta: usando $\begin{cases} \alpha = c^2 \\ \beta = ec \\ \gamma = -cf-e^2 \end{cases}$ per $x=0, c=0$ otteniamo $\beta=0$,
quindi una tangente
i punti $\begin{pmatrix} 0 \\ * \\ 1 \end{pmatrix}$ hanno $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

④ $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$Q(x) = 2x_0x_2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2$$

$$\det G = 1 > 0 \text{ e } \langle e_i, e_i \rangle \text{ isotopo} \Rightarrow \text{sgn} = (2, 2)$$

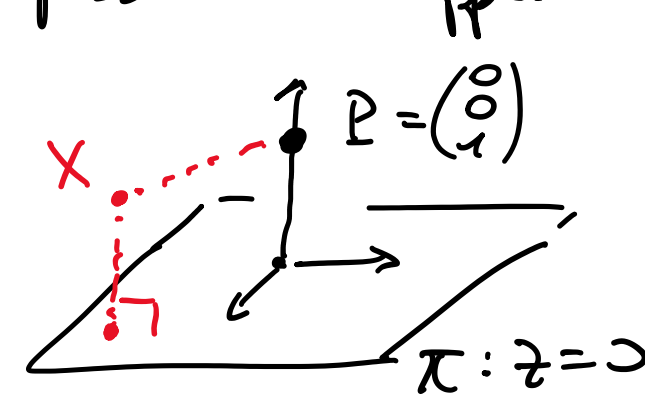
$$r_f = 4$$

proiettivamente è una degenerata, rigata

da $G_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ da ha $\langle e_i \rangle$ isotopo si deduce $\text{sgn} = (2, 1)$
 $\circ (1, 2)$

quindi definitivamente è iperboloidale iperbolico.

② possiamo supporre (considerando coordinate reali),



quindi per $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$d(X, P)^2 = \|X - P\|^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2$$

$$d(X, \pi)^2 = z^2$$

e allora

$$d(X, P) = k d(X, \pi) \text{ se } x^2 + y^2 + (z-1)^2 = k^2 z^2$$

$$\text{se } x^2 + y^2 + (1-k^2)z^2 - 2z + 1 = 0$$

matrice della quadrica cercata è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-k^2 \end{pmatrix} = A_k$

che ha $\det A_k = -k^2$, quindi sempre ≤ 0 ,
 $= 0$ se $k = 0$

(si tratta dei "punti a distanza nulla da P",
solo P come punto reale...
ovvero una cono con solo vertice reale)

se $k \neq 0$ otteniamo $\text{rg } A_k = 4$

per $A_k = (3, 1)$ perché $\det < 0$ e si vede
uno spazio di dim 3 e
con A_k è $\det > 0$.

$$(A_n)_n = \begin{pmatrix} 1 & 1-k^2 \end{pmatrix}, \text{ quindi: } \begin{cases} k < 1 \Rightarrow \text{non deg } \text{sgn} (3, 0) \\ k = 1 \Rightarrow \text{degenera } \text{sgn} (2, 0) \\ k > 1 \Rightarrow \text{non deg } \text{sgn} (2, 1) \end{cases}$$

quindi otteniamo: $\begin{cases} k=0 & \text{cono con vertice P (senza altri punti reali)} \\ k < 1 & \text{ellissoidi (con punti reali)} \\ k=1 & \text{paraboloidi ellittici} \\ k > 1 & \text{iperboloidi ellittici} \end{cases}$

(nei casi non degeneri sono coniche di $\text{sgn} (3, 1)$,
quindi con un paio di punti reali, non rette reali).

Nella matrice $(A_n)_n$ si vedono autovalori ripetuti,
quindi sono sempre quadriche di ROTAZIONE,
e tutti ellissoidi, parab. ell., iperb. ell. di ROTAZIONE
si possono ottenere con questa costruzione, e solo loro.

Non vi sono rette reali contenute in queste quadriche,
e l'equazione

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 - k^2 z^2 = 0$$

permette di trovare nel caso non degeneri due soluzioni di
rette complesse

$$(x+iy)(x-iy) + ((1+k)z-1)((1-k)z-1) = 0$$

da cui

$$\text{I} \begin{cases} \lambda(x+iy) = \mu((1+k)z-1) \\ \mu(x-iy) = -\lambda((1-k)z-1) \end{cases} \text{ e } \text{II} = \text{conjugato I}.$$

Essendo quadriche di rotazione, un solo fascio (parallelo)
di piani taglia cerchi sulle quadriche, e foci e centri (o vertici)
danno i piani $z = \text{costante}$.