

prima prova parziale Geometria 2 parte A - 24 novembre 2025

Il compito va svolto in 2 ore.

Vanno consegnati: questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento (leggibile e ben giustificato) degli esercizi.

Riportare i seguenti dati anche sui fogli protocollo con lo svolgimento:

Cognome: _____ **Nome:** _____ **Matricola:** _____

Testo del compito:

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare g di $V = \mathbb{R}^4$ di matrice

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

- (a) Scrivere la forma quadratica $Q(X_0, X_1, X_2, X_3)$ associata alla forma g , trovarne una base ortogonale, determinare rango e segnatura di g .
- (b) Classificare proiettivamente la quadrica definita da Q , determinando eventualmente le rette contenute; classificare affinementemente la quadrica, determinando eventualmente il centro.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino un punto P e un piano π a distanza $d(P, \pi) = 1$. Consideriamo la quadrica \mathcal{Q} formata dai punti X tali che $d(X, P) = kd(X, \pi)$ con k reale non negativo.

- (a) Determinare l'equazione cartesiana in un opportuno sistema di riferimento, e classificare proiettivamente ed affinementemente tali quadriche al variare del parametro k . Quali quadriche dello spazio euclideo si possono ottenere con la costruzione di questo problema?
- (b) Determinare le rette, eventualmente complesse, contenute nelle quadriche, e quali piani intersecano queste quadriche in cerchi.

Esercizio 3. Si consideri l'insieme \mathcal{S} formato dalle coniche del piano proiettivo che sono osculatrici alla conica di equazione $2X_0X_2 = X_1^2$ nel punto P_0 del riferimento dato.

- (a) Mostrare che si tratta di un sistema lineare di coniche di dimensione 2, e determinare tutte le coniche degeneri del sistema. È vero che il sistema \mathcal{S} è generato da coniche degeneri?
- (b) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del sistema \mathcal{S} . Dire se tale insieme costituisce un sistema lineare di coniche del piano duale, e in ogni caso caratterizzare questo insieme tramite condizioni geometriche.