

seconda prova parziale Geometria 2 parte A - 15 gennaio 2026

Il compito va svolto in 2 ore.

Vanno consegnati: questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento (leggibile e ben giustificato) degli esercizi.

Riportare i seguenti dati anche sui fogli protocollo con lo svolgimento:

Cognome: \_\_\_\_\_ Nome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

Testo del compito:

**Esercizio 1.** Discutere l'immagine nella Grassmanniana dell'insieme delle rette dello spazio proiettivo  $\mathbb{P}^3(\mathbb{k})$  che sono incidenti a due fissate rette  $r, s$ ; in particolare:

- (1) se  $r = s$  verificare che si tratta di un cono (3-dimensionale in uno spazio di dim.4) di vertice un punto contenuto nella Grassmanniana; viceversa, ogni tale cono corrisponde all'insieme delle rette incidenti una fissata?
- (2) se  $r, s$  sono distinte ma incidenti, verificare che si tratta della unione di due piani contenuti nella Grassmanniana, che si intersecano in una retta; viceversa, l'unione di due tali piani corrisponde all'insieme delle rette incidenti due fissate rette distinte e incidenti?
- (3) se  $r, s$  sono sghembe, verificare che si tratta di una quadrica (2-dimensionale in uno spazio di dim.3) rigata contenuta nella Grassmanniana; quali rette di  $\mathbb{P}^3(\mathbb{k})$  corrispondono ai punti delle coniche contenute in questa quadrica?

**Esercizio 2.** Consideriamo la traiettoria (ipocicloide) descritta sul piano da un punto di una circonferenza di raggio  $r$  che ruota senza strisciare internamente ad una circonferenza di raggio  $R > r$ .

- (1) scegliendo opportunamente le coordinate nel piano mostrare che l'ipocicloide può essere parametrizzato tramite

$$\gamma(\theta) = r \begin{pmatrix} \alpha \cos \theta + \cos(\alpha\theta) \\ \alpha \sin \theta - \sin(\alpha\theta) \end{pmatrix}$$

dove  $\alpha = R/r - 1$ ;

[si può continuare il resto dell'esercizio usando questa parametrizzazione senza giustificarla]

- (2) calcolare parametro d'arco e curvatura dell'ipocicloide; è possibile caratterizzare queste curve tramite questi dati?
- (3) determinare la curva dei centri dell'ipocicloide.

**Esercizio 3.** Consideriamo la curva nello spazio con parametrizzazione

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} at \cos t \\ at \sin t \\ bt \end{pmatrix}$$

(spirale conica).

- (1) determinare curvatura e torsione della curva;
- (2) come si possono caratterizzare queste curve con i dati del punto precedente?
- (3) quali curve si ottengono proiettando (con proiezioni affini parallele) la spirale conica sul piano orizzontale (ortogonale all'asse del cono)?