① Sia $X = [0,1]^{[0,1]} = \{ [0,1] \longrightarrow [0,1] \}$ (tutte le funzioni)
τ = topologia prodotto (delle topol. usuali su $[0,1]$)
β = topologia box (base di aperti $\prod_{x\in[0,1]} U_x$ con U_x aperto di $[0,1]$)

(1) sia $\mathcal{E} \subseteq X$ l'insieme delle funzioni continue
allora:
$\mathcal{E}^{\circ\beta}$ = interno di $\mathcal{E}$ per $\beta = \emptyset$ (in ogni aperto ci sono
$\mathcal{E}^{\circ\tau} = \emptyset$ funzioni discontinue)
e $\overline{\mathcal{E}}^{\tau} = X$ (in ogni aperto ci sono funzioni continue)
$\overline{\mathcal{E}}^{\beta} = \mathcal{E}$ (il complementare è aperto per β)

(2) sia $\mathcal{D} = (0,1)^{[0,1]} = \{ [0,1] \to (0,1) \}$
allora:
$\mathcal{D}^{\circ\beta} = \mathcal{D}$ (è aperto di base!)
$\mathcal{D}^{\circ\tau} = \emptyset$ (in ogni aperto ci sono funzioni che assumono i valori 0,1)
$\overline{\mathcal{D}}^{\tau} = X$
$\overline{\mathcal{D}}^{\beta} = X$ (in ogni aperto ci sono funzioni che evitano i valori 0,1).

(3) sia $\mathcal{E} = \{0,1\}^{[0,1]} = \{ [0,1] \to \{0,1\} \}$ (funzioni caratteristiche)
allora
$\left.\begin{array}{l}\mathcal{E}^{\circ\tau} = \emptyset \\ \mathcal{E}^{\circ\beta} = \emptyset\end{array}\right\}$ in ogni intorno di funzioni caratteristiche ci sono funzioni non caratteristiche...
$\left.\begin{array}{l}\overline{\mathcal{E}}^{\tau} = \mathcal{E} \\ \overline{\mathcal{E}}^{\beta} = \mathcal{E}\end{array}\right\}$ il complementare è aperto: se una funzione non è caratteristica ha tutto un intorno di funzioni non caratteristiche...

(*) X con topol. prodotto τ è:
Separabile,
non C1, né C2,
T2 e compl. regolare, non metrizz.
Connessa per archi (anche loc.)
Compatto (anche loc.)
(e T2, dunque T4, e normale!)

per β possiamo dedurre (essendo più fine):
T2

X è compatto per τ (prodotto arbitrario di compatti è compatto)
ma non per β? ovviamente no:
sia $[0,1] = V \cup U$ con $V = [0, 1/2+\varepsilon)$, $U = [1/2-\varepsilon, 1]$ aperti di $[0,1]$
allora gli aperti $\prod_{x\in[0,1]} U_x$ dove $U_x = \begin{cases} U \\ V \end{cases}$ per tutte le scelte possibili
formano un ricoprimento aperto (evidente?)
non raffinabile (togliendo anche un solo aperto non si hanno più alcune funz. caratt.)

(0) intorni della funzione nulla:
per τ sono $\{ f : [0,1] \to [0,1] : f(x_i) \in [0, \varepsilon_i) \}$
al variare $x_1, \dots, x_n \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$,
$\varepsilon_i \in \mathbb{R}_{>0}$
per β sono $\prod_{x\in[0,1]} [0, \varepsilon_x)$ con $\varepsilon_x \in \mathbb{R}_{>0}$

una successione f_n converge a 0
per τ sse $f_n(x) \to 0$ in $\mathbb{R}$ $\forall x \in [0,1]$
per β sse converge puntualmente e
per quasi tutti $x \in [0,1]$ (tranne finiti)
la successione è definitivamente 0.
(altrimenti si trova un intorno di 0
che non contiene nessun f_n).

per esempio la successione $f_n = \frac{1}{n}$ (funzioni costanti)
converge a 0 per τ e non per β.

② Ricordiamo le definizioni: X spazio topol. è
ES "estremamente sconnesso" se
chiusura di ogni aperto è aperta.
TSep "totalmente separato" se
$\forall x, y \in X$ distinti esiste sconnessione $X = U \cup V$ (U, V chiusaperti disgiunti).
con $x \in U$ e $y \in V$.
TSc "totalmente sconnesso" se
le componenti connesse sono i punti.

(0) uno spazio ES e non T2 può essere
X qualsiasi con la topol. di inclusione di $x_0 \in X$
(aperti sono $\emptyset$ e $Y \in X$ t.c. $x_0 \in Y$),
unico chiuso che contiene un aperto Y è X stesso,
ma lo spazio è solo T0.
(X con l'inclusione di 2 punti è ES, non T0).
(X con topol. BANALE è ES, non T0,
connesso, quindi non tot. sconn, né tot. separato)

(0') Uno spazio Totalm. sep è Hausdorff!

(0'') Tot sconn. $\Rightarrow$ cc = punti, chiusi
$\Rightarrow$ T1.

(1) ES e T2 implica TSep:
siano x, y distinti,
per T2 esistono U, V aperti disgiunti $U \ni x$, $V \ni y$
allora $\overline{U}, \overline{V}$ sono aperti
e $X = \overline{U} \cup (X \setminus \overline{U})$ ← chiusaperto $\ni y$
↑ chiusaperto $\ni x$
dunque X è Totalmente separato.

(1') controesempi al viceversa:
Sp. totalm. separato ma non Estr. sconn.
usiamo
$\mathbb{N}^{\partial} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cong \{ 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}$ (come $\subseteq \mathbb{R}$)
vediamo che è totalm. separato (dunque T2...)
(ogni punto è aperto, tranne ∞)
ma non estremamente sconnesso:
(aperti sono: qualsiasi insieme $\not\ni \infty$
insiemi con ∞ e compl. finito (compatto))

$2\mathbb{Z}$ aperto, non chiuso
$\overline{2\mathbb{Z}} = 2\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ perché $\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ aperto
ma $2\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ non è aperto
(altrimenti sarebbe intorno di ∞!)

più facile: $\mathbb{Q}$ con topol. usuale,
è totalm. separato,
ma $\overline{(0,1)} = [0,1]$ non è aperto
(invece $\overline{(-\pi,\pi)} = (-\pi,\pi)$ aperto!)

(2) TSep $\Rightarrow$ TSc
se un insieme ha più di 2 punti,
allora non è connesso (ci sono chiusaperti
che separano i 2 punti).

(2') controesempio al viceversa:
spazio totalm. sconnesso e non totalm. separato
sono spazi con cc = punti
qc $\neq$ punti, (quasi componenti $\equiv \cap$ dei chiusaperti che contengono un punto)
per esempio 
(topologia discreta, intorni di A, B: cofiniti.
è totalm. sconnesso (ogni intorno di A o B è sconnesso)
non è totalm. separato: A e B hanno intorni che si
intersecano sempre,
quindi non si trovano sconnessioni
per separare A e B.

Sugg. proposti:	T0	T1	T2	ES	T.Sep	TSconn.	
ins. non banale, top. banale	/	/	/	V	/	/	ES $\not\Rightarrow$ T0
includente 1 punto	V	/	/	V	/	/	ES, T0 $\not\Rightarrow$ T1
cofinita su $\mathbb{N}$	V	V	/	V	/	/	ES, T1 $\not\Rightarrow$ T2
$\mathbb{Q}$ top. usuale	V	V	V	/	V	V	T.Sep $\not\Rightarrow$ ES
$\mathbb{N} \cup \{\infty\} = \mathbb{N}^{\partial}$	V	V	V	/	V	V	
$\mathbb{N} \cup \{\infty, \infty'\}$	V	V	/	/	/	V	T.Sconn $\not\Rightarrow$ T.Sep.

(top. discrete hanno tutte queste proprietà)

Note: T.Sep $\Rightarrow$ T2, T.Sconn.
si può sospettare il $\Leftarrow$, ma è falso!
(usare $\mathbb{R}^2$ con aperti: tutti i punti di $\mathbb{Q}^2$
$\{x\} \cup (U \cap \mathbb{Q}^2)$ con $U \in$ aperti usuali $\mathbb{R}^2$, $U \ni x$.)

ATTENZIONE (ERRORI FREQUENTI):

- $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} = \{ \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \}$ NON è un insieme numerabile!
$|\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}| \geq |2^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$

Quindi non si può dire che $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ o $[0,1]^{[0,1]}$
siano separabili usando funzioni $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$....
I prodotti al più continui di separabili sono
separabili (nella topol. prodotto) ma la
dimostrazione è astuta, e usa funzioni
che cambiano valore solo in un numero
finito di indici, e usano valori in
sottoinsiemi densi e numerabili ...

•• totalmente sconnesso implica che i punti sono CHIUSI
(perché comp. conn. sono chiuse)
MA NON aperti (altrimenti la topol. è discreta!):
$\mathbb{Q}$ è totalm. sconnesso nella topol. euclidea usuale,
ma non ha i punti aperti, non ha topol. discreta.