PP2-G2B-2025-s

mercoledì 14 gennaio 2026 10:47

① r, s rette fissate di $\mathbb{P}^3(\mathbb{k})$

$\mathcal{J} = \{$rette di $\mathbb{P}^3(\mathbb{k})$ incidenti sia r sia $s\} \subseteq G_r = \{$rette $\subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{k})\}$

$\Phi : G_r \longrightarrow \mathbb{P}^5$ immersione di Plücker, $\mathcal{Q} = \Phi(G_r)$ q. Klein

- se $r = s$ si tratta delle rette di coord. Plück p tali che $\Psi(r, p) = 0$ (indico con r anche le coord. Plück della retta r)

  che è un iperpiano H_r di $\mathbb{P}^5(\mathbb{k})$ tangente alla q. Klein (è polare del punto r di $\mathbb{P}^5(\mathbb{k})$ che sta sulla q. Klein), dunque $\Phi(\mathcal{J}) = \mathcal{Q} \cap H_r$

  e si tratta di una quadrica degenere di H_r (perché H_r tg $\mathcal{Q}$).

  Viceversa, un tale cono 3-dimensionale contenuto nella q. Klein è necessariamente intersezione di $\mathcal{Q}$ con un suo piano tangente, e dunque i suoi punti corrispondono a rette di $\mathbb{P}^3(\mathbb{k})$ incidenti una fissata retta (corrispondente al punto di tangenza).

  Possiamo supporre $r = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, i.e. $r = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

  allora $\mathcal{J} = \{p : p_{23} = 0\}$ come $\Psi(r, p) = 0$

  e $p_{23} = 0$ è iperpiano che interseca la q. Klein in $\begin{cases} \cancel{p_{01}p_{23}} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0 \\ p_{23} = 0 \end{cases}$

  che è quadrica di $p_{23} = 0$ di rango 4, vertice $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = r$

  matrice $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&&&-1 \\ 0&&&1& \\ 0&&1&& \\ 0&-1&&&0 \end{pmatrix}$.

- • se $r \cap s$ è punto (sse $r \vee s$ è piano)

  allora le rette incidenti sono: quelle per $r \cap s$ (stella) e quelle del piano $r \vee s$,

  e l'immagine tramite Plücker è formata da due piani (rette della stella e rette del piano) che si intersecano in una retta (rette nel piano $r \vee s$ passanti per $r \cap s$: fascio)

  e contenuti in $\mathcal{Q}$.

  Possiamo esplicitare tutto usando $r = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

  Viceversa, una tale situazione (due piani $\subseteq$ q. Klein con intersezione una retta) può verificarsi solo per le rette incidenti due date: i piani nella q. Klein formano le rette di un piano o le rette di una stella,

  ma le rette da stessa in due piani (o in due stelle) danno piani nella q. Klein con UN PUNTO in comune (intersezione dei piani o retta per i centri delle stelle...)

  e le rette di un piano e le rette di una stella danno due piani (nella q. Klein) che possono essere disgiunti o intersecarsi in una retta (se il centro della stella sta sul piano delle altre rette...).

- •• se r, s sono sghembe,

  possiamo supporre $r = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

  e le rette incidenti sono $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\0\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}$ di coord. Plück $\begin{pmatrix}0\\\alpha\gamma\\\alpha\delta\\\beta\gamma\\\beta\delta\\0\end{pmatrix}$

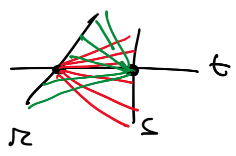
  dunque eq. $\begin{cases} p_{01} = 0 \\ p_{23} = 0 \\ \cancel{p_{01}p_{23}} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0 \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ sottosp. di $\mathbb{P}^5$ dim. 3 (sia H)

  quadrica nel sottosp. (chiaramente rigata, sia $S \subseteq H$)

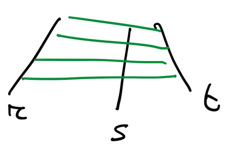
  si tratta della intersezione della q. Klein con due iperpiani tangenti (polari dei suoi punti r, s)...

  Intersecando questa quadrica bidimensionale S con piani dello spazio H, possiamo trovare due casi:

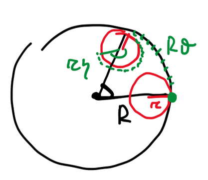
  - il piano è tangente a S, l'intersezione è fatta di due rette i cui punti corrispondono alle rette di $\mathbb{P}^3$ incidenti r, s e una terza retta incidente r, s



  - il piano non è tg a S, l'intersezione è una conica non degenere i cui punti corrispondono alle rette di $\mathbb{P}^3$ di una schiera di una quadrica rigata (rette incidenti r, s e una terza retta sghemba con entrambe)



②



$R\vartheta = r\eta$

$\Rightarrow \eta = \frac{R}{r}\vartheta$

$$\gamma(\vartheta) = (R-r)\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\\sin\vartheta\end{pmatrix} + r\left(\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\\sin\vartheta\end{pmatrix} \text{ ruotato di } -\eta\right)$$
$$= (R-r)\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\\sin\vartheta\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\cos(\vartheta-\eta)\\\sin(\vartheta-\eta)\end{pmatrix}$$
$$= r\left[\frac{R-r}{r}\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\\sin\vartheta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{r-R}{r}\vartheta\right)\\\sin\left(\frac{r-R}{r}\vartheta\right)\end{pmatrix}\right]$$
$$= r\left[\alpha\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\\sin\vartheta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos(-\alpha\vartheta)\\\sin(-\alpha\vartheta)\end{pmatrix}\right]$$
$$= r\left[\alpha\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\\sin\vartheta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos(\alpha\vartheta)\\-\sin(\alpha\vartheta)\end{pmatrix}\right]$$
$$= r\begin{pmatrix}\alpha\cos\vartheta + \cos(\alpha\vartheta)\\\alpha\sin\vartheta - \sin(\alpha\vartheta)\end{pmatrix}$$

con $\alpha = \frac{R-r}{r} = \frac{R}{r} - 1$.

$$\gamma'(\vartheta) = r\begin{pmatrix}-\alpha\sin\vartheta - \alpha\sin(\alpha\vartheta)\\\alpha\cos\vartheta - \alpha\cos(\alpha\vartheta)\end{pmatrix} = r\alpha\begin{pmatrix}-\sin\vartheta - \sin(\alpha\vartheta)\\\cos\vartheta - \cos(\alpha\vartheta)\end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'\| = r\alpha\sqrt{2 + 2\sin\vartheta\sin(\alpha\vartheta) - 2\cos\vartheta\cos(\alpha\vartheta)}$$
$$= r\alpha\sqrt{2}\sqrt{1 + \sin\vartheta\sin(\alpha\vartheta) - \cos\vartheta\cos(\alpha\vartheta)}$$
$$= r\alpha\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\alpha\vartheta + \vartheta)}$$
$$= r\alpha\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos((\alpha+1)\vartheta)}$$
$$= r\alpha\, 2\sin\left(\frac{(1+\alpha)\vartheta}{2}\right)$$

$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$1 + \alpha = 1 + \frac{R-r}{r} = \frac{R}{r}$

$$s(\vartheta) = \int \|\gamma'\|\, d\vartheta$$
$$= -r\frac{\alpha}{\alpha+1} 4\cos\left(\frac{(1+\alpha)\vartheta}{2}\right)$$

$$\gamma'' = r\alpha\begin{pmatrix}-\cos\vartheta - \alpha\cos(\alpha\vartheta)\\-\sin\vartheta + \alpha\sin(\alpha\vartheta)\end{pmatrix}$$

$$k_\gamma = \frac{|\gamma'\ \gamma''|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{\alpha^2 r^2\begin{vmatrix}-s\vartheta - s(\alpha\vartheta) & -c\vartheta - \alpha c(\alpha\vartheta)\\ c\vartheta - c(\alpha\vartheta) & -s\vartheta + \alpha s(\alpha\vartheta)\end{vmatrix}}{r^3\alpha^3 2^3\sin^3\frac{(\alpha+1)\vartheta}{2}} =$$
$$= \frac{1 - \alpha - \alpha s\vartheta s(\alpha\vartheta) + s\vartheta s(\alpha\vartheta) + \alpha c\vartheta c(\alpha\vartheta) - c\vartheta c(\alpha\vartheta)}{r\alpha\, 2^3\sin^3\frac{(\alpha+1)\vartheta}{2}}$$
$$= \frac{(1-\alpha)\left(1 + s\vartheta s(\alpha\vartheta) - c\vartheta c(\alpha\vartheta)\right)}{r\alpha\, 2^3\sin^3\frac{(\alpha+1)\vartheta}{2}}$$

$= 2\sin^2\frac{(\alpha+1)\vartheta}{2}$

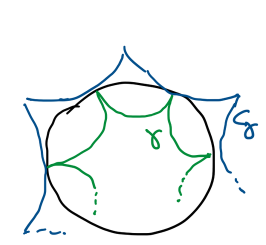
$$= \frac{1-\alpha}{r\alpha\, 2^2}\ \frac{1}{\sin\frac{(\alpha+1)\vartheta}{2}}$$

$$\left(\frac{\alpha+1}{4r\alpha}s(\vartheta)\right)^2 + \left(\frac{1-\alpha}{4r\alpha}\ \frac{1}{k(\vartheta)}\right)^2 = 1$$

$$(\alpha+1)^2 s^2(\vartheta) + (1-\alpha)^2\frac{1}{k(\vartheta)^2} = (4r\alpha)^2$$

questa relazione $a^2 s^2 + b^2\frac{1}{k^2} = c^2$ con $a^2 > b^2$ caratterizza gli ipocicloidi.

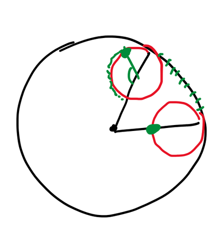
$$C_\gamma = \gamma + \frac{1}{k}n = \underbrace{r\begin{pmatrix}\alpha c\vartheta + c(\alpha\vartheta)\\\alpha s\vartheta - s(\alpha\vartheta)\end{pmatrix}}_{\gamma} + \underbrace{\frac{4\alpha r}{1-\alpha}\cdot\cancel{\sin\frac{(1+\alpha)\vartheta}{2}}}_{1/k}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\cancel{\sin\frac{(1+\alpha)\vartheta}{2}}}\begin{pmatrix}-c\vartheta + \cos\alpha\vartheta\\-s\vartheta - s(\alpha\vartheta)\end{pmatrix}}_{n}$$
$$= r\begin{pmatrix}\alpha c\vartheta + c(\alpha\vartheta) - 2\frac{\alpha}{1-\alpha}c\vartheta + \frac{2\alpha}{1-\alpha}c(\alpha\vartheta)\\\alpha s\vartheta - s(\alpha\vartheta) - 2\frac{\alpha}{1-\alpha}s(\vartheta) - \frac{2\alpha}{1-\alpha}s(\alpha\vartheta)\end{pmatrix}$$
$$= r\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\begin{pmatrix}\alpha c\vartheta - c(\alpha\vartheta)\\\alpha s\vartheta + s(\alpha\vartheta)\end{pmatrix}$$



$\alpha - \frac{2\alpha}{1-\alpha} = \alpha\frac{-\alpha-1}{1-\alpha} = \alpha\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$

$1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = -\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$

Si tratta di un altro ipocicloide, come si può vedere parametrizzando il cicloide a partire dal punto:



$$(R-r)\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\\sin\vartheta\end{pmatrix} - r\left(\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\\sin\vartheta\end{pmatrix} \text{ ruotato di } -\eta\right)$$
$$\vdots$$
$$r\begin{pmatrix}\alpha c\vartheta - c(\alpha\vartheta)\\\alpha s\vartheta + s(\alpha\vartheta)\end{pmatrix}$$

③ $\gamma(t) = \begin{pmatrix}at\cos t\\at\sin t\\bt\end{pmatrix}$ $\gamma' = \begin{pmatrix}a\cos t - at\sin t\\a\sin t + at\cos t\\b\end{pmatrix}$ $\gamma'' = \begin{pmatrix}-2a\sin t - at\cos t\\2a\cos t - at\sin t\\0\end{pmatrix}$ $\gamma''' = \begin{pmatrix}-3a\cos t + at\sin t\\-3a\sin t - at\cos t\\0\end{pmatrix}$

$\|\gamma'\| = \sqrt{a^2 + a^2t^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + a^2t^2}$

$$\gamma' \times \gamma'' = \begin{pmatrix}-b(2a\cos t - at\sin t)\\-b(2a\sin t + at\cos t)\\2a^2 + a^2t^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-ab(2\cos t - t\sin t)\\-ab(2\sin t + t\cos t)\\a^2(2+t^2)\end{pmatrix}$$

$$\|\gamma' \times \gamma''\|^2 = a^2b^2(4+t^2) + a^4(2+t^2)^2$$

$$|\gamma'\ \gamma''\ \gamma'''| = b\begin{vmatrix}-2a\sin t - at\cos t & -3a\cos t + at\sin t\\2a\cos t - at\sin t & -3a\sin t - at\cos t\end{vmatrix}$$
$$= b\left(6a^2 + a^2t^2\right) = a^2b(6+t^2)$$

Abbiamo

$$k = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{a\sqrt{b^2(4+t^2) + a^2(2+t^2)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+a^2t^2}^{\,3}}$$

$$\tau = \frac{|\gamma'\ \gamma''\ \gamma'''|}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2} = \frac{a^2b(6+t^2)}{a^2b^2(4+t^2) + a^4(2+t^2)^2} = \frac{b(6+t^2)}{b^2(4+t^2) + a^2(2+t^2)^2}$$

L'espressione per τ è biquadratica in t, possiamo ricavare

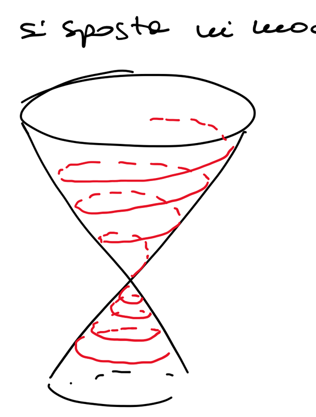
$t^2 = \varphi(a, b, \tau)$ (φ è funzione che si ricava risolvendo $At^4 + Bt^2 + C = 0$ con A, B, C funzioni di a, b, τ)

e sostituire in k:

$$k = \Phi(a, b, \tau)$$

Queste curve sono caratterizzate dall'esistenza di costanti a, b tali che valga questa relazione tra k e τ.

si tratta di una curva che sta su un cono di rotazione, ed è la traiettoria di un punto sulla retta generatrice che si sposta in modo lineare con la generatrice stessa.



per simmetria attorno all'asse z basta studiare le proiezioni di vettori $\begin{pmatrix}c\\0\\1\end{pmatrix}$,

imponendo $bt + \lambda = 0$

troviamo $\lambda = -bt$

e quindi $\begin{pmatrix}at\cos t\\at\sin t\\bt\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}at\cos t\\at\sin t\\bt\end{pmatrix} - bt\begin{pmatrix}c\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}at\cos t - bct\\at\sin t - bct\\0\end{pmatrix}$

e se $c = 0$ troviamo due spirali di Archimede ($t \geq 0$, $t \leq 0$)

altrimenti $at\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix} - bct\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, le spirali "spostate" da una funzione lineare

c'è anche il caso  quando la direzione è quella della generatrice del cono.

(cosiddette spirali DOPPLER, per l'effetto acustico).