seconda prova parziale Geometria 2 parte B - 12 giugno 2025

Riportare i seguenti dati sui fogli protocollo con lo svolgimento:

Cognome: _____________ **Nome:** _____________ **Matricola:** _________

Testo del compito:

Esercizio 1. Sull'insieme $X = [0,1]^{[0,1]}$ (dove $[0,1]$ è dotato della topologia euclidea usuale indotta da $\mathbb{R}$) consideriamo la topologia prodotto τ e la box-topology β (generata dai prodotti di aperti).

(a) Elencare le proprietà di numerabilità, separazione, connessione e compattezza per X dotato della topologia τ. Che cosa si può dedurre da questo per β?

(b) Descrivere gli intorni della funzione nulla per τ e per β; trovare se possibile una successione in X che converga alla funzione nulla per τ e non per β.

(c) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme delle funzioni continue.

(d) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme $(0,1)^{[0,1]}$.

(e) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme $\{0,1\}^{[0,1]}$.

Esercizio 2. Sia X un spazio topologico. Diciamo che:

• è "estremamente sconnesso" se la chiusura di ogni aperto è aperta;

• è "totalmente separato" se per ogni coppia di punti distinti esiste una sconnessione che separa i punti;

• è "totalmente sconnesso" se le componenti connesse sono i punti.

(a) mostrare che spazi totalmente sconnessi sono $T1$,
che spazi totalmente separati sono $T2$,
che esistono spazi estremamente sconnessi non $T0$;

(b) mostrare che spazi hausdorff estremamente sconnessi sono totalmente separati;

(c) mostrare che il viceversa di (b) non vale;

(d) mostrare che spazi totalmente separati sono totalmente sconnessi;

(e) mostrare che il viceversa di (d) non vale.

Sugg.: usare come esempi: insiemi con topologie banali, insiemi con topologia includente di un punto, i numeri razionali $\mathbb{Q}$ con topologia usuale, la topologia cofinita su $\mathbb{N}$, una compattificazione di $\mathbb{N}$ con un punto, una compattificazione di $\mathbb{N}$ con due punti.