

## Programma del corso di Geometria 2 parte A (a.a. 2024/25)

### Forme Bilineari e Quadratiche

- Definizione e proprietà delle forme bilineari (simmetria, antisimmetria, alternanza, non degenerazione, nucleo, definitezza) e relazioni con le forme quadratiche<sup>∇</sup>. Relazione con gli spazi duali<sup>∇</sup>. Matrici (di Gram) associate a forme bilineari; congruenza di matrici.
- Ortogonalità, teorema di decomposizione ortogonale<sup>∇</sup>, esistenza di basi ortogonali (per forme simmetriche)<sup>∇</sup>; vettori e sottospazi isotropi; metodo di completamento dei quadrati<sup>∇</sup>; metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt<sup>∇</sup>; criterio di definitezza usando i minori principali<sup>∇</sup> e gli autovalori; teorema di Jacobi<sup>∇</sup>.
- Classificazione delle forme bilineari simmetriche complesse e reali (rango e indice di inerzia, segnatura, teorema di Sylvester)<sup>∇</sup>; piani euclidei e iperbolici, spazi di Minkowski (solo definizione).
- Classificazione delle forme bilineari alternanti (spazi simplettici, esistenza di basi simplettiche)<sup>∇</sup>,
- Nozione di isometria per forme bilineari simmetriche e alternanti non degeneri; teorema di Cartan-Dieudonné<sup>∇</sup>; teorema di estensione di Witt; trasformazioni pseudoeuclidee (simmetrie ortogonali) e simplettiche (trasvezioni simplettiche); gruppi di matrici corrispondenti.
- Forme complesse hermitiane.
- Aggiunzione tra applicazioni lineari; morfismi autoaggiunti, normali; teorema spettrale (complesso e reale)<sup>∇</sup>.

### Quadriche e Coniche

- Richiami di geometria proiettiva, affine, euclidea.
- Generalità, coni e struttura dei coni<sup>∇</sup>, coni tangenti da un punto<sup>∇</sup>. Polarità associata ad una quadrica non degenera, proprietà della polarità<sup>∇</sup>. Proprietà di armonia<sup>∇</sup>. Iperpiani tangenti, e quadriche involuppo (duali).
- Classificazione proiettiva reale e complessa<sup>∇</sup> di coniche (degeneri e non, a punti reali e non) e quadriche (degeneri: riducibili e coni, non degeneri: rigate, a punti reali e prive di punti reali). Riferimenti autopolari per quadriche. Razionalità di coniche irriducibili<sup>∇</sup>; birapporti sulle coniche; costruzione di Steiner delle coniche<sup>∇</sup> (e duale); teorema di Pascal<sup>∇</sup> (e duale, di Brianchon). Struttura delle quadriche rigate<sup>∇</sup>: schiere di rette, mappa di Segre, costruzioni geometriche.
- classificazione affine reale e complessa di coniche (parabole e coniche a centro, ellissi e iperboli) e quadriche (paraboloidi e quadriche a centro, ellissoidi e iperboloidi). Proprietà di simmetria<sup>∇</sup> e diametrali, asintoti.
- classificazione euclidea reale di coniche e quadriche (semiassi, parametri e loro calcolo, metodi degli invarianti ortogonali<sup>∇</sup>, riferimento canonico<sup>∇</sup>); Coniche: assi, fuochi, direttrici e proprietà focali<sup>∇</sup>; caratterizzazioni metriche. Cerchi sulle quadriche<sup>∇</sup>.
- Spazio delle coniche; condizioni lineari; fasci di coniche (ciclo base, coniche degeneri).

### applicazioni

- Grassmanniana delle rette dello spazio proiettivo 3-dimensionale: coordinate plückeriane delle rette, relazione tra le coordinate plückeriane, immersione di Plücker e quadrica di Klein; studio dei sottospazi contenuti nella grassmanniana e delle sue sezioni lineari.
- Introduzione delle geometrie non-euclidee (ellittica e iperbolica) nel piano proiettivo, nozione di assoluto, definizione di distanze ed angoli tramite birapporti; calcoli di distanze e questioni di parallelismo tra rette; studio dei triangoli, di fasci di rette e cerchi (cicli, ipercicli, oricicli nel caso iperbolico). La geometria euclidea come limite delle geometrie ellittiche e iperboliche.

### Curve differenziali (immerse)

- Curve e parametrizzazioni regolari. Lunghezza d'arco e parametrizzazione canonica.
- Riferimento di Frénet, equazioni di Frénet<sup>∇</sup>, curvatura e torsione<sup>∇</sup>.
- Forma normale delle curve, cerchi osculatori e raggio di curvatura, proprietà del massimo<sup>∇</sup>.
- Teorema Fondamentale della teoria locale delle curve<sup>∇</sup>.
- Esempi principali svolti durante la teoria: rette e circonferenze, curvatura e torsione nulle e/o costanti<sup>∇</sup>, eliche circolari<sup>∇</sup>, eliche<sup>∇</sup>, spirali di Cornu e logaritmiche<sup>∇</sup>, spirale di Archimede, curve sferiche<sup>∇</sup>, curve dei centri osculatori, evolute ed involute.

[<sup>∇</sup>] significa argomenti non in programma.

<sup>∇</sup> significa risultati di cui conoscere la dimostrazione.

## Programma del corso di Geometria 2 parte B (a.a. 2024/25)

### Superficie differenziali (immerse)

- Superficie e parametrizzazioni regolari; descrizioni locali tramite carte, immagini inverse di valori regolari, grafici di funzioni<sup>∇</sup>.
- Cambiamenti di parametri (carte) e funzioni differenziabili.
- Piano tangente e differenziali di mappe tra superficie.
- Prima forma fondamentale: definizione, matrici locali, calcoli di angoli, lunghezze, aree.
- Mappa di Gauss, mappa di Weingarten (autoaggiunta per pff<sup>∇</sup>), seconda forma fondamentale (calcoli locali). Curvature principali e di Gauss<sup>∇</sup>. Significato geometrico della sff<sup>∇</sup>. Teorema Egredium di Gauss<sup>∇</sup>.
- Punti sulle superficie: ellittici, iperbolici, parabolici, ombelicali, planari; superficie con soli punti ombelicali<sup>∇</sup>.
- Curve sulle superficie: riferimenti di Frénet e Darboux, confronto<sup>∇</sup>. Curvature geodetiche e normali, torsione geodetica. Linee di curvatura, asintotiche, geodetiche; equazioni differenziali delle geodetiche<sup>∇</sup>. Caso di Clairaut e geodetiche delle superficie di rotazione<sup>∇</sup>.
- Esempi principali svolti durante la teoria: sfera (e sue proiezioni)<sup>∇</sup>, quadriche (ellissoidi, iperboloidi, paraboloidi), coni<sup>∇</sup>, cilindri<sup>∇</sup>, tori immersi, superficie di rotazione<sup>∇</sup>, pseudo-sfera di Beltrami, elicoidi<sup>∇</sup>, superficie rigate<sup>∇</sup>.

### Topologia generale

- Definizioni di topologia (aperti, chiusi; interno, chiusura, derivato, frontiera di insiemi; operatori di Kuratowski e loro proprietà)<sup>∇</sup>. Basi e prebasi delle topologie.
- Filtri e strutture topologiche (filtri di intorni dei punti), corrispondenza con le topologie. Basi e prebasi di filtri.
- Filtri e nozioni di punti limite e punti aderenti; reti e chiusura<sup>∇</sup>.
- Funzioni continue, aperte, chiuse. Topologie indotte, quoziente, prodotto; topologie induttive, proiettive e loro proprietà universali<sup>∇</sup>.
- (pseudo)metriche e topologie (pseudo)metrizzabili.
- Proprietà di separabilità numerabilità (topologica), relazioni tra loro<sup>∇</sup> e controesempi principali.
- Proprietà di separazione, relazioni tra loro<sup>∇</sup> e controesempi principali.
- famiglie di (pseudo)metriche, spazi completamente regolari [e topologie uniformizzabili], caratterizzazioni<sup>∇</sup>.
- Connessione, locale connessione, connessione per archi, locale connessione per archi e relazioni tra loro<sup>∇</sup>. Componenti connesse, componenti arco-connesse e loro proprietà.
- Compattezza (per ricoprimenti e per reti), locale compattezza, compattificazione di Alexandroff<sup>∇</sup>, compattificazione di Stone-Cech<sup>∇</sup>, relazioni tra compattezza e hausdorff<sup>∇</sup>.
- [Completezza, completamenti e relazioni con la compattezza.]
- Esempi e controesempi principali svolti durante la teoria: topologie banali, discrete, cofinite, d'ordine, includenti ed escludenti, prodotti arbitrari<sup>∇</sup> di  $\mathbf{R}$  ed  $I$ , (pseudo)metrizzabili, uniformizzabili, retta di Sorgenfrey<sup>∇</sup>, insieme di Cantor (prodotti numerabili di insiemi discreti)<sup>∇</sup>, seno e pettine del topologo<sup>∇</sup>, gruppi classici di matrici, spazi affini e proiettivi (reali e complessi).

### Superficie reali compatte

- Definizione di superficie reali; orientabilità; rappresentazioni poligonali; esempi base: sfera, piano proiettivo reale, toro, otre di Klein.
- Somma connessa di superficie e sue proprietà.
- Triangolazioni, caratteristica di Eulero-Poincaré e genere di superficie reali compatte, comportamento per somma connessa<sup>∇</sup>.
- Teorema di classificazione (topologica) delle superficie reali compatte<sup>∇</sup>.

[<sup>∇</sup>] significa argomenti non in programma.

<sup>∇</sup> significa risultati di cui conoscere la dimostrazione.