Algebra 2 - 5 febbraio 2014

Nome e Cognome: Matricola:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Sia H un sottogruppo di un gruppo G e sia $H_G = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$. Provare che se $|G : H| = n$ allora G/H_G è isomorfo a un sottogruppo di S_n.
2. Provare che un campo finito di cardinalità q e caratteristica p è isomorfo al campo di spezzamento del polinomio $x^q - x$ sul campo $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. Nel gruppo delle permutazioni S_8 su 8 oggetti, siano $a = (1234)(5678)$, $b = (1537)(2846)$ e sia $H = \langle a, b \rangle$.
   (a) Provare che $a^2 = b^2$.
   (b) Provare che $bab^{-1} = a^{-1}$.
   (c) Determinare l'ordine di H.
   (d) Il gruppo H è isomorfo a un gruppo diedrale?
4. Sia G un gruppo di ordine $12p$ con p primo, $p > 5$.
   (a) Provare che se $p \neq 11$, allora il p-Sylow di G è normale.
   (b) Sia $p = 11$: provare che se nè l'11-Sylow nè il 3-Sylow sono normali, allora lo è il 2-Sylow.
5. Sia p un primo e sia $\alpha = \sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{p}$.
   (a) Provare che $\alpha^3 = p^2 + p + 3p\alpha$.
   (b) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.
   (c) Provare che $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}]$.
6. Sia $F = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il campo con 2 elementi.
   (a) Provare che $x^4 + x + 1$ è irriducibile in $F[x]$.
   (b) Determinare l'ordine di un campo di spezzamento di $x^4 + x + 1$ su F.
   (c) Fattorizzare $f(x) = x^{16} + x^4 + 1 \in F[x]$.
   (d) Quanti ideali massimali contiene l'anello $A = F[x]/(f(x))$?
   (e) Quanti elementi contiene l'anello A?
   (f) Quanti elementi invertibili contiene l'anello A?