Algebra 2 - 6 luglio 2012

Nome e Cognome:

Matricola:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Ricordiamo che se H è un sottogruppo e x è un elemento del gruppo (moltiplicativo) G, il coniugato di H mediante x è il sottogruppo $xHx^{-1} := \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$. Consideriamo l'intersezione N di tutti i coniugati di H in G. Dimostrare che
   (a) N è un sottogruppo normale di G;
   (b) ogni sottogruppo normale di G contenuto in H è contenuto in N.

2. Si completi la definizione: Dato il numero intero $n > 1$, il numero complesso z è una radice primitiva n-esima di 1 se ...
   (a) Si dimostri che se z è una radice 9^a primitiva di 1, allora $z^6+z^3+1 = 0$;
   (b) si trovi il polinomio minimo di z su $\mathbb{Q}$;
   (c) si dica se $\mathbb{Q}(z)$ è il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^9 - 1$.

3. Siano p un numero primo e G un gruppo finito.
   (a) Si completi la definizione: Un p-sottogruppo di Sylow di G è ...
   (b) Consideriamo il gruppo (diedrale) D delle simmetrie di un poligono regolare di 60 lati. D ha ordine 120, ha un sottogruppo normale ciclico $N = \langle a\rangle$ di ordine 60, e risulta $D = \langle b\rangle N$ dove b ha ordine 2 e $bxb^{-1} = x^{-1}$ per ogni $x \in N$. Si dimostri che
      i. ogni sottogruppo di N è normale in D;
      ii. $\langle b\rangle\langle a^{15}\rangle$ è un 2-sottogruppo di Sylow di D;
      iii. i 2-sottogruppi di Sylow di D sono 15.

4. Sia $u = \sqrt{2}(1 + i\sqrt{3})$.
   (a) Verificare che u è algebrico su $\mathbb{Q}$.
   (b) $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i\sqrt{3})$?
   (c) Trovare il polinomio minimo $f(x)$ di u su $\mathbb{Q}$.
   (d) Controllare se $\mathbb{Q}(u)$ contiene il complesso coniugato $\bar{u}$ di u.

5. Sia $G = \langle a \rangle$ un gruppo ciclico (moltiplicativo) di ordine $n > 1$.
    (a) Dimostrare che se $a^r \in G$ risulta $\langle a^r \rangle = \langle a^d \rangle$, dove $d = MCD(r, n)$.
    (b) Quanti sono i sottogruppi di un gruppo ciclico di ordine 100?
6. Sia $F = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
    (a) Si elenchino i polinomi irriducibili di grado 2 di $F[x]$;
    (b) Si elenchino i polinomi irriducibili di grado 4 di $F[x]$.
7. Si consideri l'insieme G delle matrici

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z},\ a \neq 0 \right\}.$$

    (a) Si verifichi che G è sottogruppo di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$;
    (b) Si verifichi che $\phi : G \to (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ definita da

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \mapsto a$$

    è un omomorfismo suriettivo.
    (c) Si descriva il nucleo di ϕ.
    (d) Qual è l'ordine di G?