Algebra 2 - 8 luglio 2013

Nome e Cognome:

Matricola:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Si dimostri la seguente versione del teorema di corrispondenza per i gruppi: Dato il sottogruppo normale K del gruppo G, sia G/K il gruppo quoziente.

   (a) Per ogni sottogruppo H di G contenente K il quoziente H/K è un sottogruppo di G/K;

   (b) La posizione $H \mapsto H/K$ definisce una biiezione dell'insieme dei sottogruppi di G contenenti K sull'insieme dei sottogruppi di G/K.

   (c) Il sottogruppo H di G contenente K è normale in G se e solo se H/K è normale in G/K, e in questo caso
   $$\frac{G}{H} \cong \frac{G/K}{H/K}.$$

2. Nel gruppo di matrici a coefficienti in $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$
   $$G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \neq 0\}$$
   consideriamo i sottoinsiemi
   $$D = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \neq 0,\, b = 0\}, \qquad P = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a = 1\}.$$

   (a) Si provi che D e P sono sottogruppi di G e che P è normale in G;

   (b) Si verifichi che $DP = G$ e che $D \cap P = 1$;

   (c) Si verifichi che D è isomorfo al gruppo moltiplicativo del campo $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ e P è isomorfo al gruppo additivo del campo.

   (d) Si provi che D e P sono entrambi ciclici.

   (e) È vero che per ogni primo p i p-sottogruppi di Sylow di G sono ciclici?

3. Siano a, b elementi di ordine finito m, n rispettivamente del gruppo G; supponiamo che m, n siano primi tra loro.

   (a) Si dimostri che se G è commutativo allora ab ha ordine mn.

(b) Si trovino a, b nel gruppo simmetrico S_4 con ordini m, n coprimi, il cui prodotto ab non ha ordine mn.

4. Indichiamo con $\mathbb{F}_p$ il campo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, dove p è un numero primo. Fissato n intero positivo, poniamo $g_n = x^{p^n} - x \in \mathbb{F}_p[x]$, e sia K un campo di spezzamento per g_n su $\mathbb{F}_p$.

   (a) dimostrare che K coincide con l'insieme degli zeri di g_n in K;

   (b) determinare l'ordine di K.

5. Sia $u = \sqrt[4]{2} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$.

   (a) Verificare che u è algebrico su $\mathbb{Q}$, e che il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ è $g = x^4 - 4x^2 + 8x - 2$;

   (b) Dire se $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$;

   (c) Controllare che anche $v = i\sqrt[4]{2} + \sqrt{2}$ è uno zero di g;

   (d) Determinare il grado del campo di spezzamento di g su $\mathbb{Q}$.

6. Nell'anello dei polinomi $\mathbb{Z}[x]$ consideriamo l'insieme $\mathcal{X}$ degli ideali I di $\mathbb{Z}[x]$ con la proprietà che $I \cap \mathbb{Z} = 0$.

   (a) Si verifichi che $\mathcal{X}$, ordinato per inclusione, ha elementi massimali.

   (b) Consideriamo l'ideale principale J di $\mathbb{Z}[x]$ generato da $2x-1$. È vero che $J \in \mathcal{X}$? che J è massimale in $\mathcal{X}$? che è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[x]$?