

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

- Provare che $G/Z(G)$ è isomorfo a un sottogruppo del gruppo degli automorfismi di G .
 - Provare che se $G/Z(G)$ è ciclico allora G è abeliano.
 - Provare che se il gruppo degli automorfismi di G è ciclico, allora G è abeliano.
- Si considerino le permutazioni $\alpha = (1, 2, 3, 5)$, $\beta = (2, 5)$, $\gamma = (4, 6)$ e sia H il sottogruppo di S_6 generato da questi tre elementi.

 - Provare che $\langle \alpha, \beta \rangle$ è isomorfo a D_4 e che $H \cong D_4 \times C_2$.
 - Provare che H è un 2-sottogruppo di Sylow di S_6 .
 - Quanti elementi di ordine 4 contiene H ?
 - E' vero che gli elementi di ordine 4 di H sono a due a due coniugati in H ?
 - Trovare, se possibile, due elementi di H che sono coniugati in S_6 ma non in H .
 - Siano $1 \leq i \neq j \leq 6$ e si consideri $\sigma = (i, j) \in S_6$. Provare che H è coniugato in S_6 a un 2-sottogruppo di Sylow di $C_{S_6}(\sigma)$.
 - Determinare il numero di coniugati di H in S_6 .
- Siano $\langle a \rangle$ e $\langle b \rangle$ due gruppi ciclici di ordine, rispettivamente, 12 e 16 e si considerino i due elementi $x = (a^8, b^{12})$ e $y = (a^{10}, b^8)$ di $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$.

 - Determinare gli ordini di x e di y .
 - Trovare gli elementi di ordine 2 in $\langle x \rangle$ e in $\langle y \rangle$.
 - Trovare gli elementi di ordine 3 in $\langle x \rangle$ e in $\langle y \rangle$.
 - Determinare l'ordine di $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle$.
 - Determinare l'ordine di $G = \langle x, y \rangle$ e scrivere G come prodotto diretto di gruppi ciclici di ordine potenza di primo.
- Sia $n \geq 2$ e D_n il gruppo diedrale di grado n e ordine $2n$. Si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:

 - n è dispari;
 - gli elementi di ordine 2 di D_n sono tutti coniugati.
- Sia G un gruppo di ordine 30. Provare che o un 3-sottogruppo di Sylow o un 5-sottogruppo di Sylow di G è normale.