Algebra 2 - Primo compitino - 17 novembre 2014 **Tema B**

NOME E COGNOME: MATRICOLA:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. (a) Provare che se $G/Z(G)$ è ciclico allora G è abeliano.
   (b) Provare che $G/Z(G)$ è isomorfo a un sottogruppo del gruppo degli automorfismi di G.
   (c) Provare che se il gruppo degli automorfismi di G è ciclico, allora G è abeliano.

2. Siano $\langle a\rangle$ e $\langle b\rangle$ due gruppi ciclici di ordine, rispettivamente, 16 e 12 e si considerino i due elementi $x = (a^{12}, b^8)$ e $y = (a^8, b^{10})$ di $\langle a\rangle \times \langle b\rangle$.
   (a) Determinare gli ordini di x e di y.
   (b) Trovare gli elementi di ordine 2 in $\langle x\rangle$ e in $\langle y\rangle$.
   (c) Trovare gli elementi di ordine 3 in $\langle x\rangle$ e in $\langle y\rangle$.
   (d) Determinare l'ordine di $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle$.
   (e) Determinare l'ordine di $G = \langle x, y\rangle$ e scrivere G come prodotto diretto di gruppi ciclici di ordine potenza di primo.

3. Si considerino le permutazioni $\alpha = (3, 6), \beta = (2, 5), \gamma = (1, 2, 4, 5)$ e sia H il sottogruppo di S_6 generato da questi tre elementi.
   (a) Provare che $\langle\beta, \gamma\rangle$ è isomorfo a D_4 e che $H \cong C_2 \times D_4$.
   (b) Provare che H è un 2-sottogruppo di Sylow di S_6.
   (c) Quanti elementi di ordine 4 contiene H?
   (d) E' vero che gli elementi di ordine 4 di H sono a due a due coniugati in H?
   (e) Trovare, se possibile, due elementi di H che non sono coniugati in H ma lo sono in S_6.
   (f) Siano $1 \leq i \neq j \leq 6$ e si consideri $\sigma = (i, j) \in S_6$. Provare che H è coniugato in S_6 a un 2-sottogruppo di Sylow di $C_{S_6}(\sigma)$.
   (g) Determinare il numero di coniugati di H in S_6.

4. Sia $n \geq 2$ e D_n il gruppo diedrale di grado n e ordine $2n$. Si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:
   - gli elementi di ordine 2 di D_n sono tutti coniugati;
   - n è dispari.

5. Sia G un gruppo di ordine 30. Provare che o un 3-sottogruppo di Sylow o un 5-sottogruppo di Sylow di G è normale.