Algebra 2 - Secondo compitino - 19 gennaio 2015

Nome e Cognome: Matricola:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Enunciare e dimostrare il lemma di Gauss.
2. Sia F un campo. Provare che u è algebrico su F se e solo se $F[u]$ ha dimensione finita come spazio vettoriale su F.
3. Utilizzare il lemma di Zorn per dimostrare che ogni gruppo G non abeliano contiene un sottogruppo proprio massimale rispetto alla proprietà di essere abeliano.
4. Sia $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio di grado $n \geq 1$ e si definisca
$$f^*(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right).$$
   (a) Provare che se $f^*(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$, allora anche $f(x)$ lo è.
   (b) Usare il punto precedente e il lemma di Eisenstein per provare che $f(x) = 2x^4+6x^3-8x+9$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.
   (c) Sia u uno zero di $f(x)$ in un opportuno campo di spezzamento. Scrivere u^{-1} nella forma $a_3u^3 + a_2u^2 + a_1u + a_0$ con $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$.
   (d) Sia u uno zero di $f(x)$ in un opportuno campo di spezzamento e sia $v = 4u^5+12u^4+18u-4$. Scrivere v nella forma $a_3u^3 + a_2u^2 + a_1u + a_0$ con $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$.
   (e) Provare che $\mathbb{Q}[v] = \mathbb{Q}[u]$.
5. Sia $u = \sqrt{\sqrt[3]{4} - 1}$.
   (a) Determinare il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$.
   (b) Provare che $\mathbb{Q}[u]$ contiene $\sqrt[3]{4}$ e calcolare $|\mathbb{Q}[u] : \mathbb{Q}[\sqrt[3]{4}]|$.
   (c) Determinare il polinomio minimo $h(x)$ di u^2 su $\mathbb{Q}$.
   (d) Sia E il campo di spezzamento di $h(x)$ su $\mathbb{Q}$. Provare che E contiene una radice primitiva terza di 1.
   (e) Determinare $|E : \mathbb{Q}|$.
6. Sia F un campo finito e sia $f(x) = x^5 + 4x^3 + x^2 + 2x + 4$.
   (a) Provare che 1 è uno zero multiplo di $f(x)$ se e solo se F ha caratteristica 3.
   (b) Fattorizzare $f(x)$ nel caso $F = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
   (c) Determinare l'ordine di un campo di spezzamento di $f(x)$ su $F = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.