Algebra 2 - 16 luglio 2014

Nome e Cognome: Matricola:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Sia $f(x)$ un polinomio a coefficienti in un campo F; provare che $f(x)$ ha radici multiple (in un opportuno campo di spezzamento) se e solo se $(f(x), f'(x)) \neq 1$.

2. Sia G un gruppo finito, p un primo e sia N un sottogruppo normale di G tale che p non divide $|G : N|$. Si provi che ogni p-sottogruppo di Sylow di G è contenuto in N.

3. Sia $\sigma = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7)(8, 9)$.
   (a) Determinare il numero di coniugati di $\sigma \in S_9$.
   (b) Determinare il centralizzante di σ in S_9.
   (c) Elencare i sottogruppi di $\langle\sigma\rangle$, determinando un generatore per ognuno di essi.

4. Sia G un gruppo di ordine 3000.
   (a) Sia $n_5(G)$ il numero dei 5-sottogruppi di Sylow di G. Si provi che $n_5(G) \in \{1, 6\}$.
   (b) Dedurne che se il 5-sottogruppo di Sylow di G non è normale in G allora esiste un omomorfismo non banale $\phi : G \to S_6$.
   (c) Concluderne che G possiede almeno un sottogruppo normale proprio non banale.

5. Sia $u = i\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$.
   (a) Determinare il polinomio minimo $f(x)$ di u su $\mathbb{Q}$.
   (b) E' vero che $f(x)$ ha radici reali?
   (c) Sia E il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$. Determinare $|E : Q|$.
   (d) E' vero che E contiene i?

6. Sia $F = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e si consideri il polinomio $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in F[X]$. Sia inoltre E un campo di spezzamento di $f(x)$ su F e si consideri l'anello $A = F[x]/(f(x))$.
   (a) Fattorizzare $f(x)$ in F.
   (b) Determinare il numero di ideali dell'anello A.
   (c) Quanti sono gli ideali massimali di A?
   (d) Qual è l'ordine di E?