

Algebra 2 - Secondo compitino - 21 gennaio 2014

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Siano α e β algebrici su un campo F . Si provi che anche $\alpha + \beta$ è algebrico su F .
2. Sia $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p primo e sia $f(x) \in F[x]$ un polinomio irriducibile di grado n . Si provi che $f(x)$ divide $x^{p^n} - x$.
3. Sia G un gruppo con la proprietà che ogni sottogruppo è finitamente generato.
 - (a) Sia $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una catena di sottogruppi propri. Provare che $K = \cup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ è un sottogruppo di G . Usare il fatto che K è finitamente generato per provare che $K = H_\lambda$ per un opportuno $\lambda \in \Lambda$.
 - (b) Dedurre che se $G \neq \{1\}$ allora G contiene almeno un sottogruppo massimale.
4. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ si consideri il sottoinsieme

$$J = \{(x - 2y) + i(2x + y) \in \mathbb{Z}[i] : x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

- (a) Si provi che J è un ideale di $\mathbb{Z}[i]$.
 - (b) Si provi che J è l'ideale principale generato da $1 + 2i$.
 - (c) Si dica se J è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[i]$.
 - (d) Si consideri l'ideale I generato da $5 + 5i$. Determinare $I + J$ e $I \cap J$.
5. Sia $F = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e si consideri il polinomio $f(x) = x^3 + 2x + 1 \in F[x]$.
 - (a) Si provi che $f(x)$ è irriducibile.
 - (b) Sia u una radice di $f(x)$ in una opportuna estensione e sia $K = F[u]$. Determinare $|K|$.
 - (c) Si provi che per ogni $b \in K \setminus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, si ha $F[b] = K$.
 - (d) Si provi che K contiene E un campo di spezzamento su $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ del polinomio $x^{31} - 1$.
 6. Sia $f(X) := x^4 - x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$.
 - (a) Provare che $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$.
 - (b) Sia u uno zero reale di $f(x)$ (mostrare che esiste). Esprimere l'inverso di u e di u^2 come polinomi in u .
 - (c) Da $u^2(1 - u^2) = -3$ dedurre che $1 - u^2$ non è un quadrato in $\mathbb{Q}(u)$.
 - (d) Mostrare che $\mathbb{Q}(u)$ non è un campo di spezzamento per $f(x)$ su $\mathbb{Q}$.
 - (e) Mostrare che un campo di spezzamento per $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ ha grado 8.