

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

- Sia G un p -gruppo finito e sia N un sottogruppo normale di G . Provare che se $N \neq 1$, allora $N \cap Z(G) \neq 1$ (*Suggerimento: considerare l'azione di coniugio di G su N e studiare la cardinalità delle orbite*).
- Sia $G = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico di ordine 90 e siano $H = \langle g^{12} \rangle$ e $K = \langle g^{80} \rangle$.
 - Determinare $|H|$ e $|K|$.
 - Trovare l'ordine e un generatore per $H \cap K$ e per $\langle H, K \rangle$.
 - Quanti elementi di ordine 15 contiene G ?
 - Quanti elementi di ordine 15 contiene il gruppo $H \times K$?
- Si considerino le permutazioni $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8)$ e $\tau = (1, 3, 5, 2, 4)(6, 7, 8)$.
 - Determinare il numero di coniugati di σ nel gruppo simmetrico S_8 .
 - Descrivere il centralizzante di σ in S_8 , esibendone un insieme di generatori.
 - Trovare $\beta \in S_8$ tale che $\tau = \beta\sigma\beta^{-1}$.
 - Esiste $\beta \in A_8$ tale che $\tau = \beta\sigma\beta^{-1}$?
- Supponiamo che G sia un gruppo finito di ordine p^2q con p e q primi distinti. Denotiamo con $n_p(G)$ e $n_q(G)$ il numero dei p -sottogruppi di Sylow e dei q -sottogruppi di Sylow di G .
 - Provare che se $n_p(G) \neq 1$ allora $p < q$.
 - Provare che se $n_p(G) \neq 1$ allora $n_q \neq p$.
 - Provare che se $n_q(G) = p^2$ allora G contiene $|G| - p^2$ elementi di ordine q .
 - Provare che G contiene almeno un sottogruppo di Sylow normale.
 - Provare che G contiene almeno un sottogruppo normale di indice primo.
- Sia $G = GL(2, 5)$ il gruppo delle matrici invertibili 2×2 sul campo $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e sia $N = SL(2, 5)$ il sottogruppo di G formato dalle matrici in G che hanno determinante 1.
 - Provare che N è un sottogruppo normale di G e che G/N è ciclico di ordine 4.
 - Determinare gli ordini di G e di N .
 - Sia $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Determinare l'ordine di g .
 - Trovare il centralizzante di g in G e in N .
 - Calcolare $n_5(G)$. Quanti sono gli elementi di G di ordine 5?
 - Provare che tutti gli elementi di G di ordine 5 sono coniugati.
 - E' vero che tutti gli elementi di N di ordine 5 sono coniugati in N ?
- Sia G un gruppo finito contenente un sottogruppo normale N con la proprietà che tutti gli elementi di N diversi da 1 sono coniugati in G . Provare che G contiene un sottogruppo di indice $|N| - 1$ e dedurre $|G| \geq |N|^2 - |N|$.