

Algebra 2 - 5 febbraio 2014

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

- Supponiamo che un gruppo G agisca su un insieme Ω . Provare che se $\omega \in \Omega$, allora la cardinalità dell'orbita di ω tramite G coincide con l'indice dello stabilizzatore di ω in G .
- Siano F ed E due campi, con $F \leq E$ e sia $u \in E$.
 - Si provi che u è algebrico su F se e solo se il grado $[F[u] : F]$ è finito.
 - Si provi che se $[F[u] : F] = n$ allora ogni elemento di $F[u]$ si scrive in uno e un solo modo nella forma $a_0 + a_1u + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}$ con $a_0, \dots, a_{n-1} \in F$.
- Sia $F = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ il campo di ordine 7. Su $G = F \times F^*$ si definisca un'operazione ponendo, per ogni $(a, x), (b, y) \in G$, $(a, x)(b, y) = (a + xb, xy)$.
 - Si provi che, con tale operazione, G è un gruppo.
 - Si provi che ponendo, per ogni $u \in F$ ed ogni $(a, x) \in G$, $(a, x) \cdot u = xu - a$ si definisce un'azione di G sull'insieme F .
 - Si provi che il nucleo di questa azione è il sottogruppo identico, concludendo che G è isomorfo ad un sottogruppo di S_7 .
 - Per (c) possiamo identificare G con un sottogruppo di S_7 . Si provi che G contiene un 7-sottogruppo di Sylow di S_7 .
 - Si determini $n_7(S_7)$, il numero di 7-sottogruppi di Sylow di S_7 .
 - Denotato con P un 7-sottogruppo di Sylow di S_7 , si dimostri che $N_{S_7}(P) \cong G$.
- Si considerino i seguenti due polinomi in $\mathbb{Q}[x]$: $f_1(x) = x^3 - 2$ e $f_2(x) = x^4 - 3$. e siano E_1 ed E_2 i rispettivi campi di spezzamento.
 - Provare che $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$.
 - Determinare $[E_1 : \mathbb{Q}]$.
 - Determinare $[E_2 : \mathbb{Q}]$.
 - Provare che $i\sqrt{3} \in E_1 \cap E_2$.
 - Determinare $[E_1 \cap E_2 : \mathbb{Q}]$.
 - Sia E il campo di spezzamento di $f_1(x)f_2(x)$. Determinare $[E : \mathbb{Q}]$.
- Sia $f(x) = x^3 + 6x^2 + x + 1 \in F[x]$ con $F = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ e sia $A = F[x]/(f(x))$.
 - Fattorizzare $f(x)$ in $F[x]$.
 - Determinare l'ordine di E , un suo campo di spezzamento.
 - Quanti sono gli ideali massimali dell'anello A ?
 - Quanti sono gli elementi invertibili dell'anello A ?