Algebra 2 - 25 febbraio 2014

NOME E COGNOME: MATRICOLA:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Sia H un sottogruppo di G. Provare che se $|G : H|$ è finito allora H contiene un sottogruppo normale di G di indice finito.

2. Siano E, F, K tre campi con $E \leq F \leq K$ e sia $u \in K$. Provare che se F è algebrico su E e u è algebrico su F, allora u è algebrico su E.

3. Siano h e k i seguenti elementi del gruppo simmetrico $S_8 : h = (12345678)$, $k = (24)(37)(68)$.
   (a) Si calcoli khk^{-1} e si dica se il sottogruppo $\langle h \rangle$ è normale in $G = \langle h, k \rangle$.
   (b) E' vero che $G = \langle h \rangle \langle k \rangle$?
   (c) Si determini il centro di G.

4. Sia G un gruppo di ordine 253, non abeliano.
   (a) Provare che $Z(G) = 1$.
   (b) Sia $g \in G$ di ordine 11: quanti sono i coniugati di $g \in G$?
   (c) Quante sono le classi di coniugio di G e quanti elementi contiene ognuna di queste classi di coniugio?

5. Si scelgano in $\mathbb{Z}[i]$ gli elementi $a = 8 + 9i$ e $b = 5$.
   (a) Fattorizzare a e b.
   (b) Determinare un generatore per l'ideale $I = (a) + (b)$ e per l'ideale $J = (a) \cap (b)$.
   (c) E' vero che $Z[i]/I$ è un campo?
   (d) Qual è l'ordine di $Z[i]/I$?

6. Sia $\epsilon \in \mathbb{C}$ una radice primitiva nona di 1 e sia $u = \epsilon + \epsilon^{-1}$.
   (a) Determinare il polinomio minimo di ϵ su $\mathbb{Q}$.
   (b) Provare che $u^3 - 3u = -1$.
   (c) Determinare il polinomio minimo $f(x)$ di u su $\mathbb{Q}$.
   (d) Provare che se $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice di $f(x)$, allora anche $\alpha^2 - 2$ lo è.
   (e) Determinare il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$.